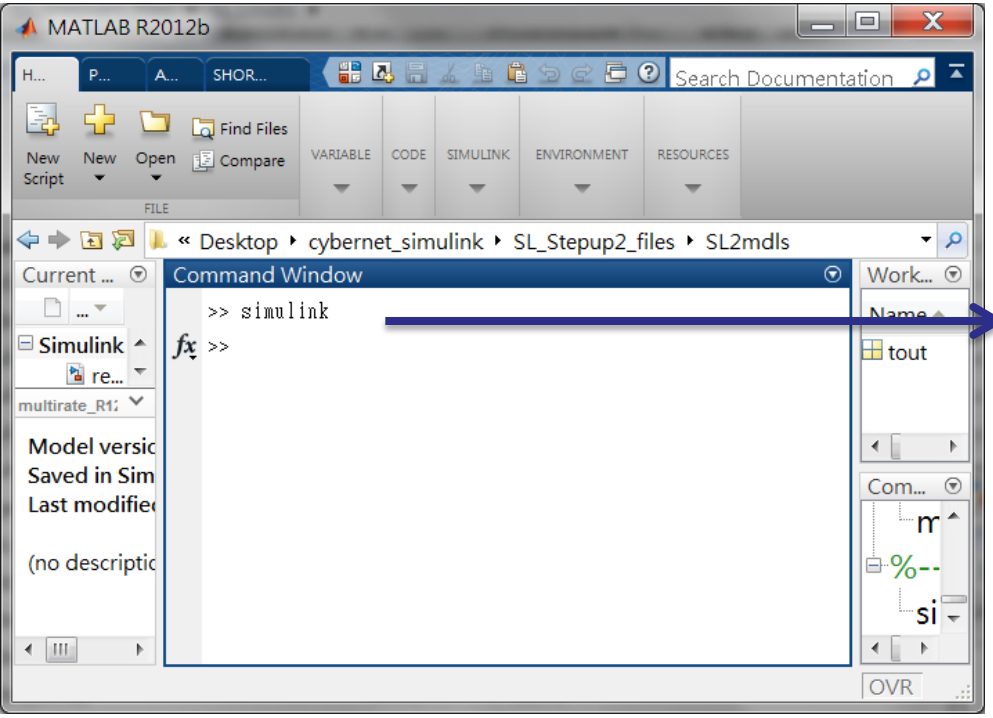
使用Simulink建構微分方程

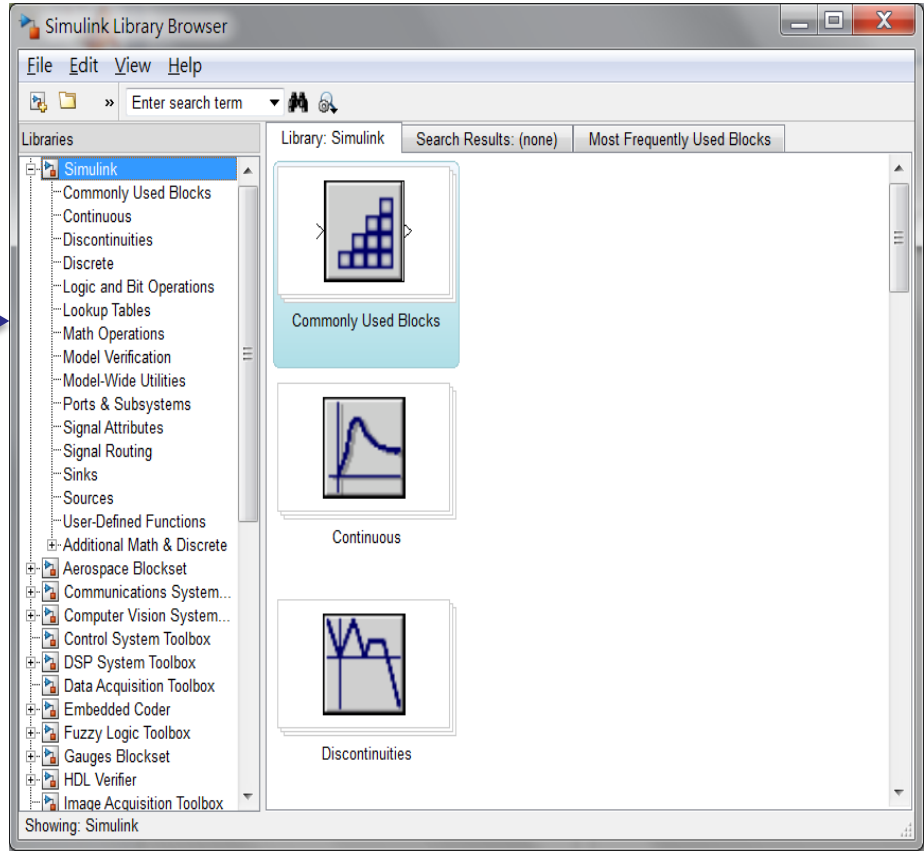
support@terasoft.com.tw
Presenter:Michael Chen

Agenda

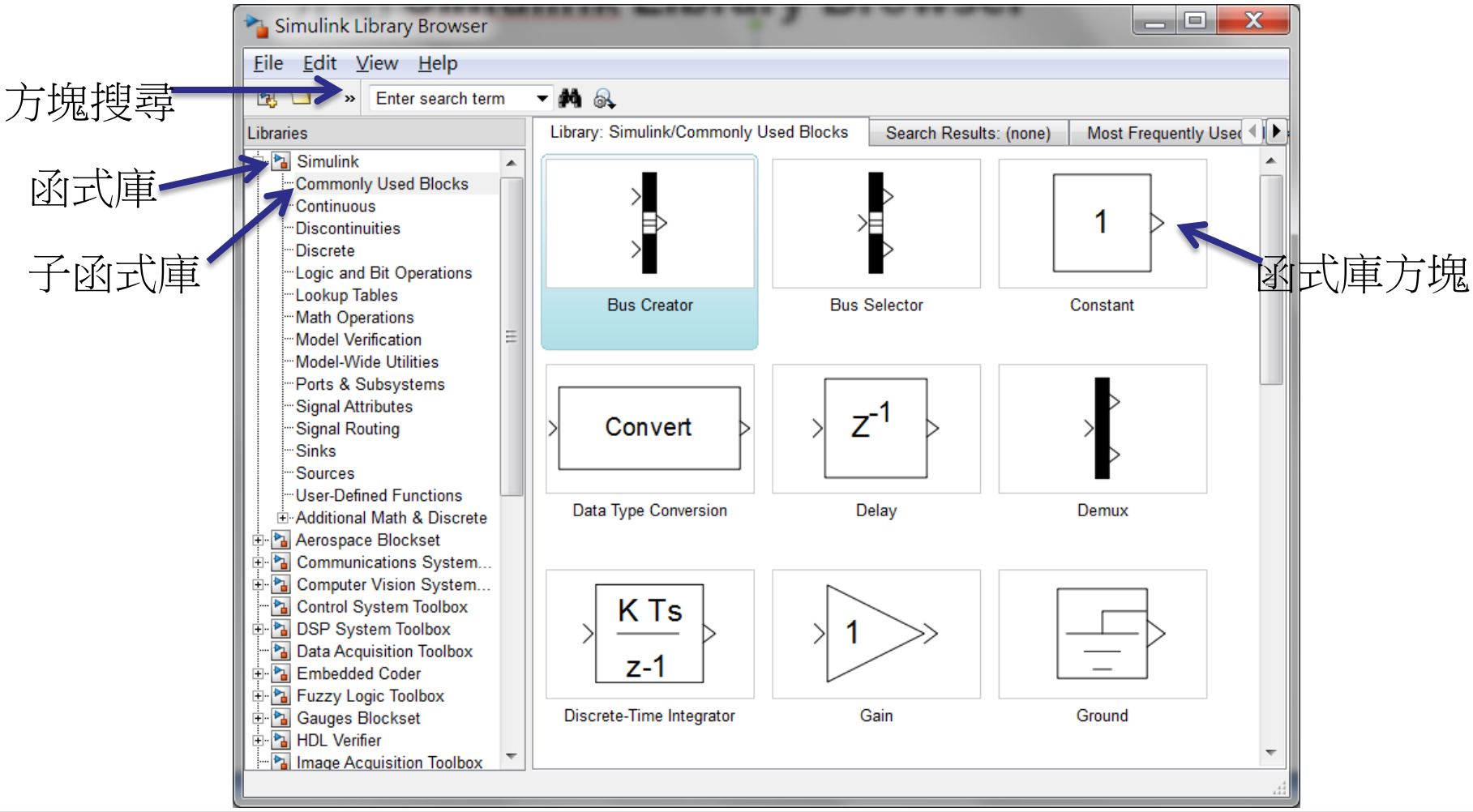
- Simulink 基本操作介紹
- 一個自由度的動態系統微分方程建構
- 多個自由度的動態系統微分方程建構
- 非線性系統
- 離散時間系統建構

Simulink 基本操作介紹





介紹 Simulink Library Browser



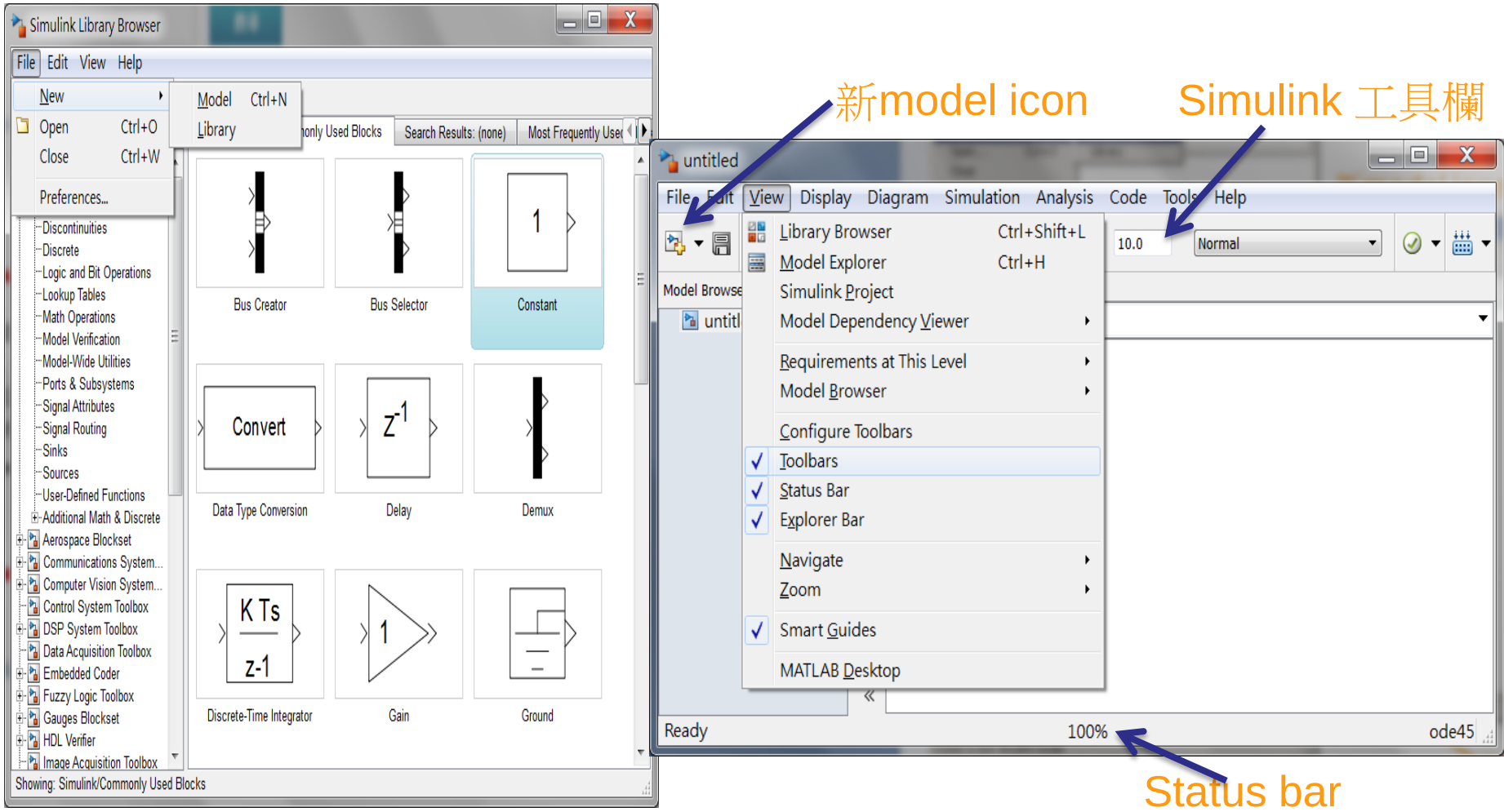
Simulink 函式庫

- Commonly used blocks – 一般常用的方塊
- Continuous – 連續時間方塊,如 Integerator, Derivative
- Discontinuities – 非連續的方塊,如Saturation
- Discrete – 離散時間方塊,如Unit Delay
- Logic and Bit Operations – 邏輯或位元運算方塊 如邏輯運算子(Logic operator), 關係運算子(Relational operator)
- Look-Up Tables – 查表法方塊 如sine , cosine
- Math Operations – 數學運算;如總和(sum),乘積(product)
- Model Verification – 錯誤偵測
- Model-Wide Utilities –Model 方塊的資訊,如Model Info

Simulink 函式庫 (續)

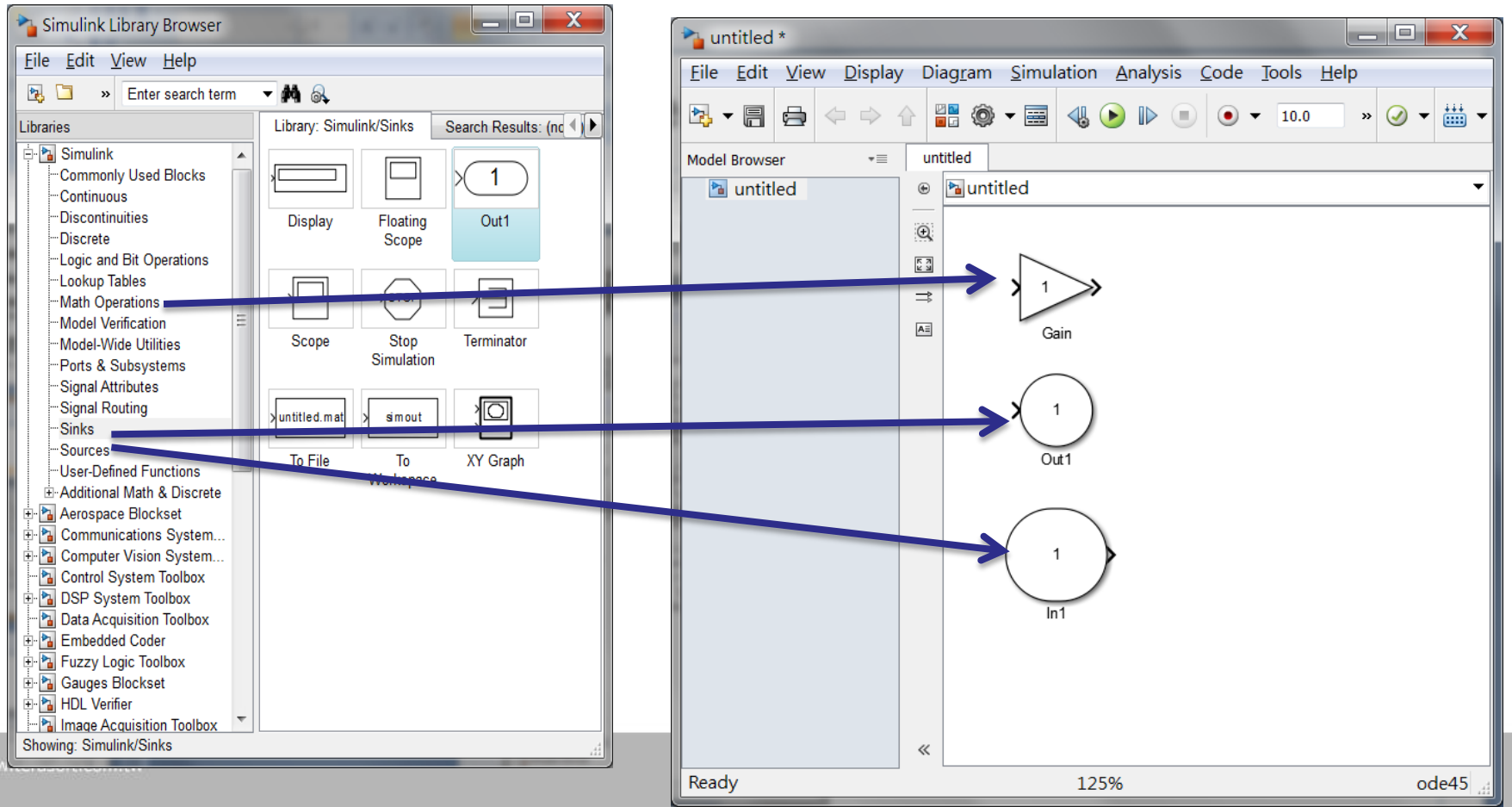
- Ports & Subsystems – 阜與子系統方塊如 In1,Out1,Subsystem
- Signals Attributes – 信號的屬性,如資料型態轉換 (Data Type Conversion)
- Signals Routing – 信號的路由選擇,如 Switch, From, Goto
- Sinks – 顯示或輸出資料的方塊,如Display, Scope
- Sources – 訊號源方塊,如 Clock, Sine Wave, Constant, Pulse Generator
- User-Defined Functions – 使用者定義的方塊,如 MATLAB Function, S-Function
- Additional Math & Discrete – 其他數學與離散方塊

建立一個新的Model



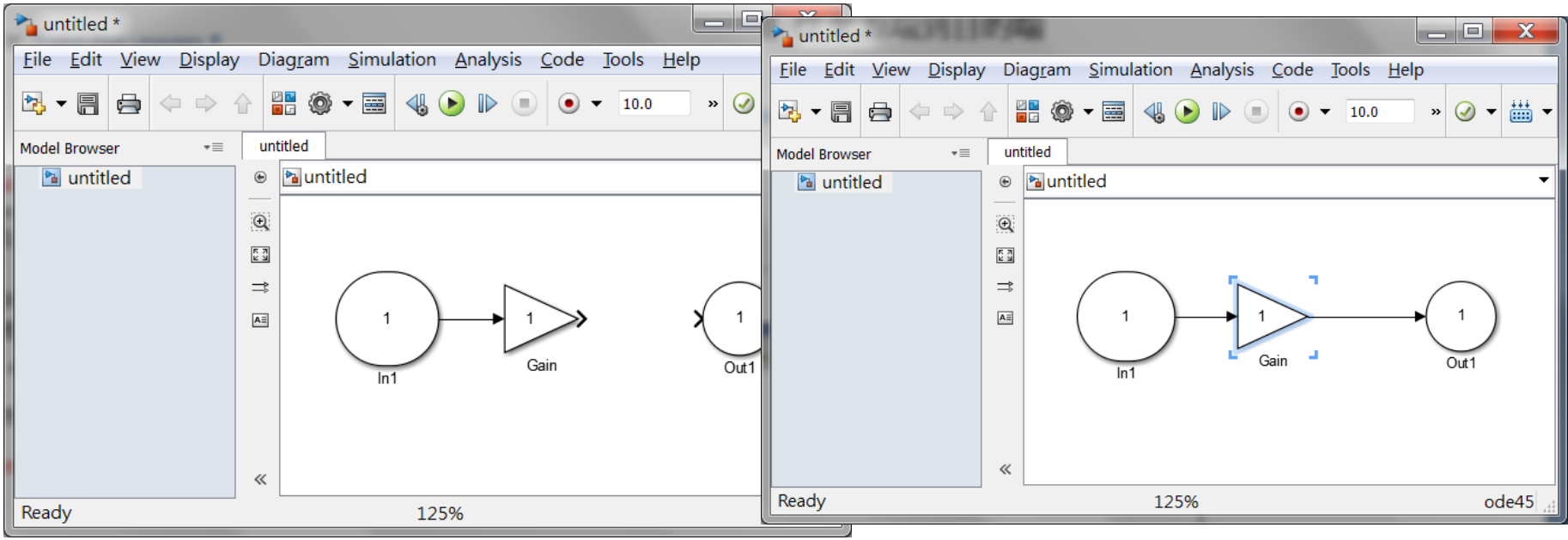
於Model加入方塊

可以用從資料庫瀏覽器拖拉方塊到model裡面,方塊依字母的順序排列在函式庫裡



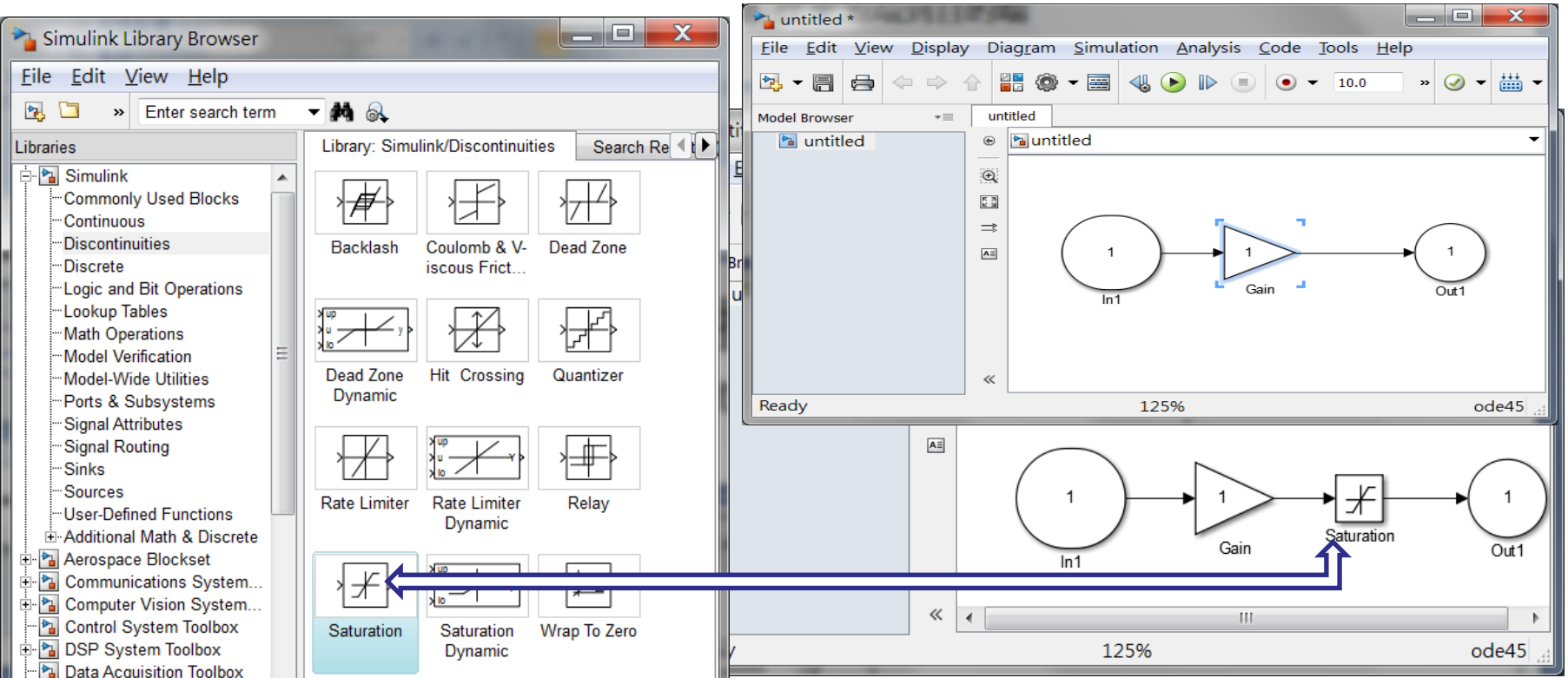
連結訊號

- Ctrl+滑鼠左鍵 從來源端到目的端



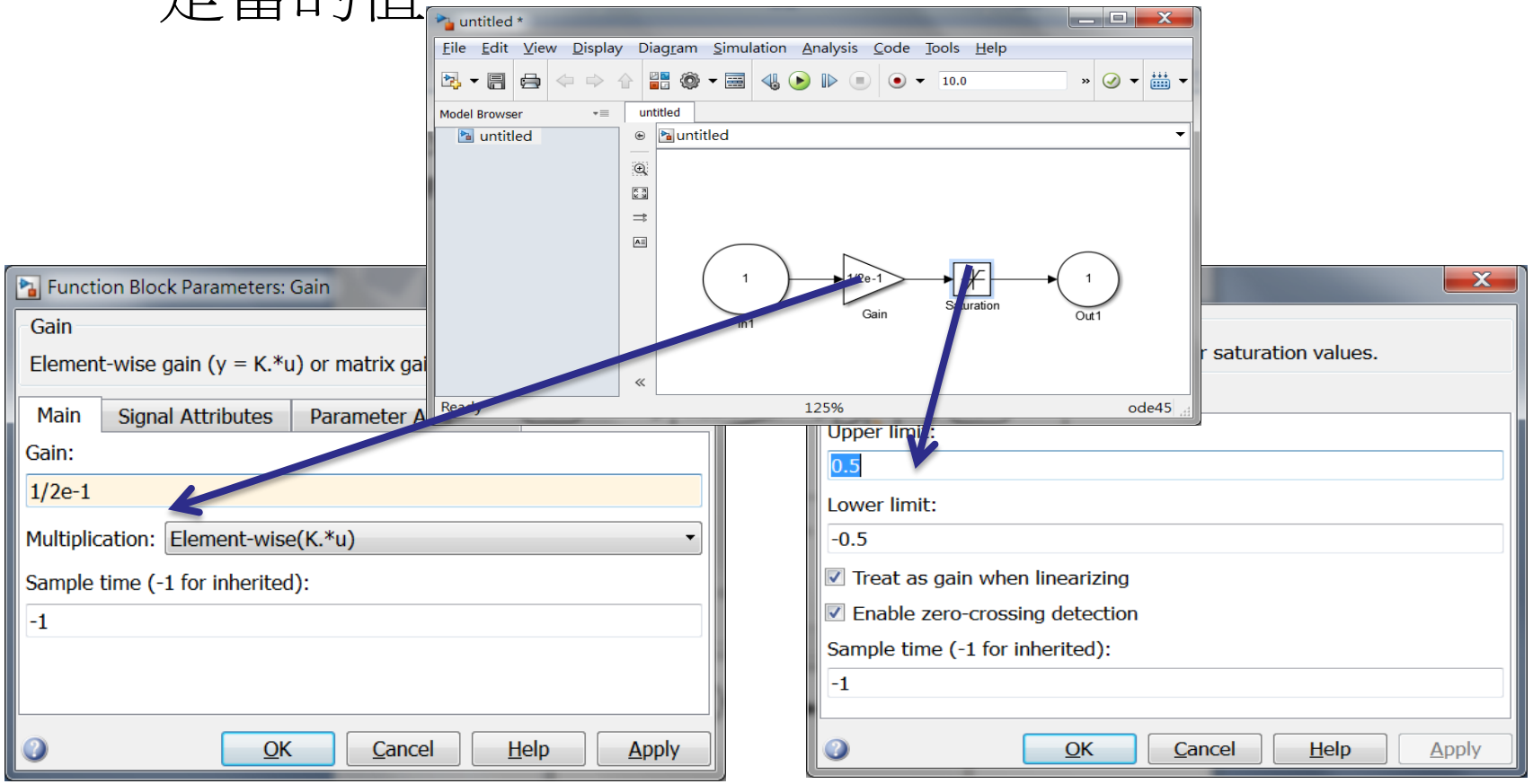
插入方塊

- 在訊號中間插入方塊,把方塊放在訊號線上



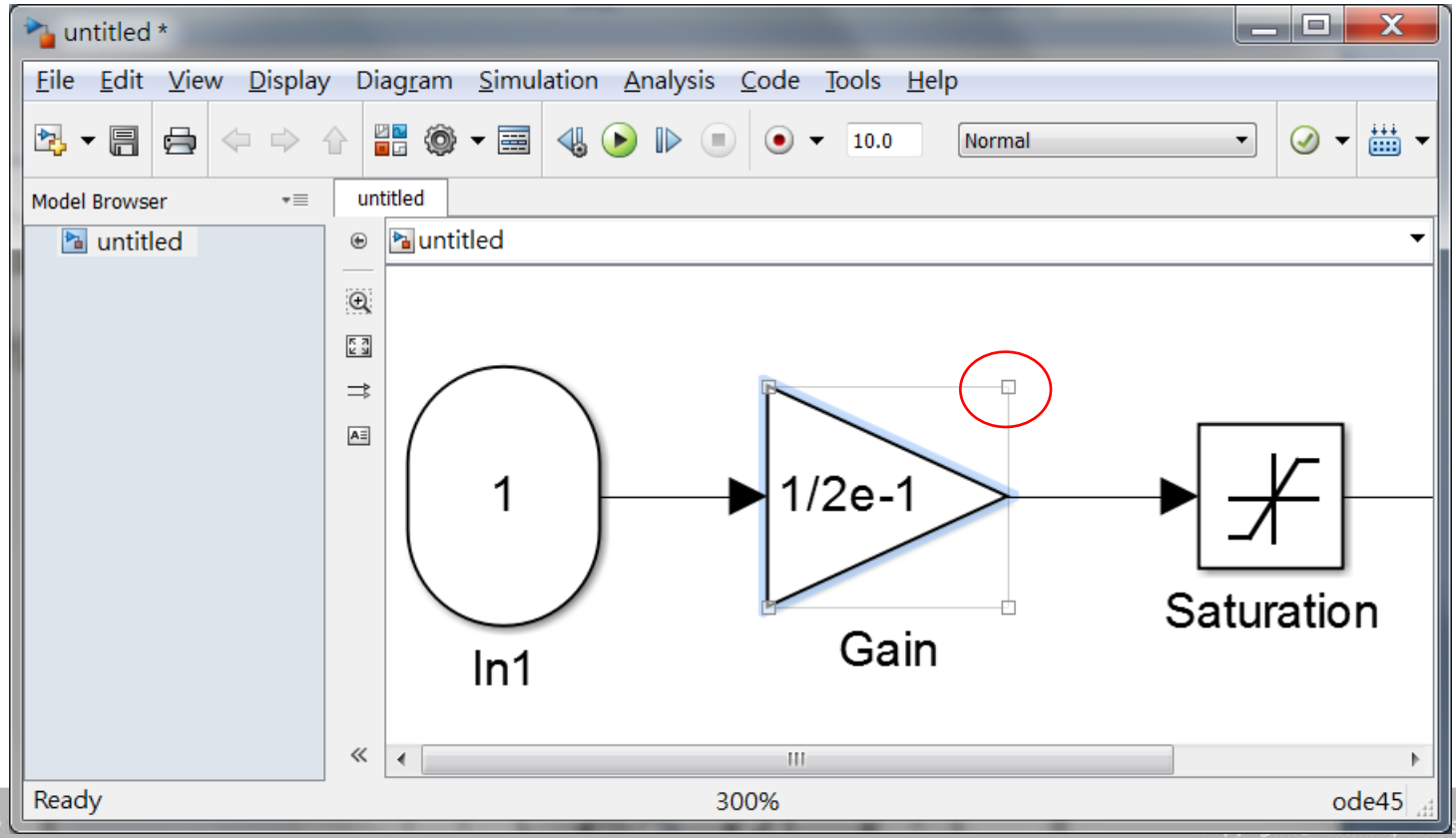
設定方塊參數

- 連點滑鼠兩下開啟一個方塊參數,在欄位輸入是當的值



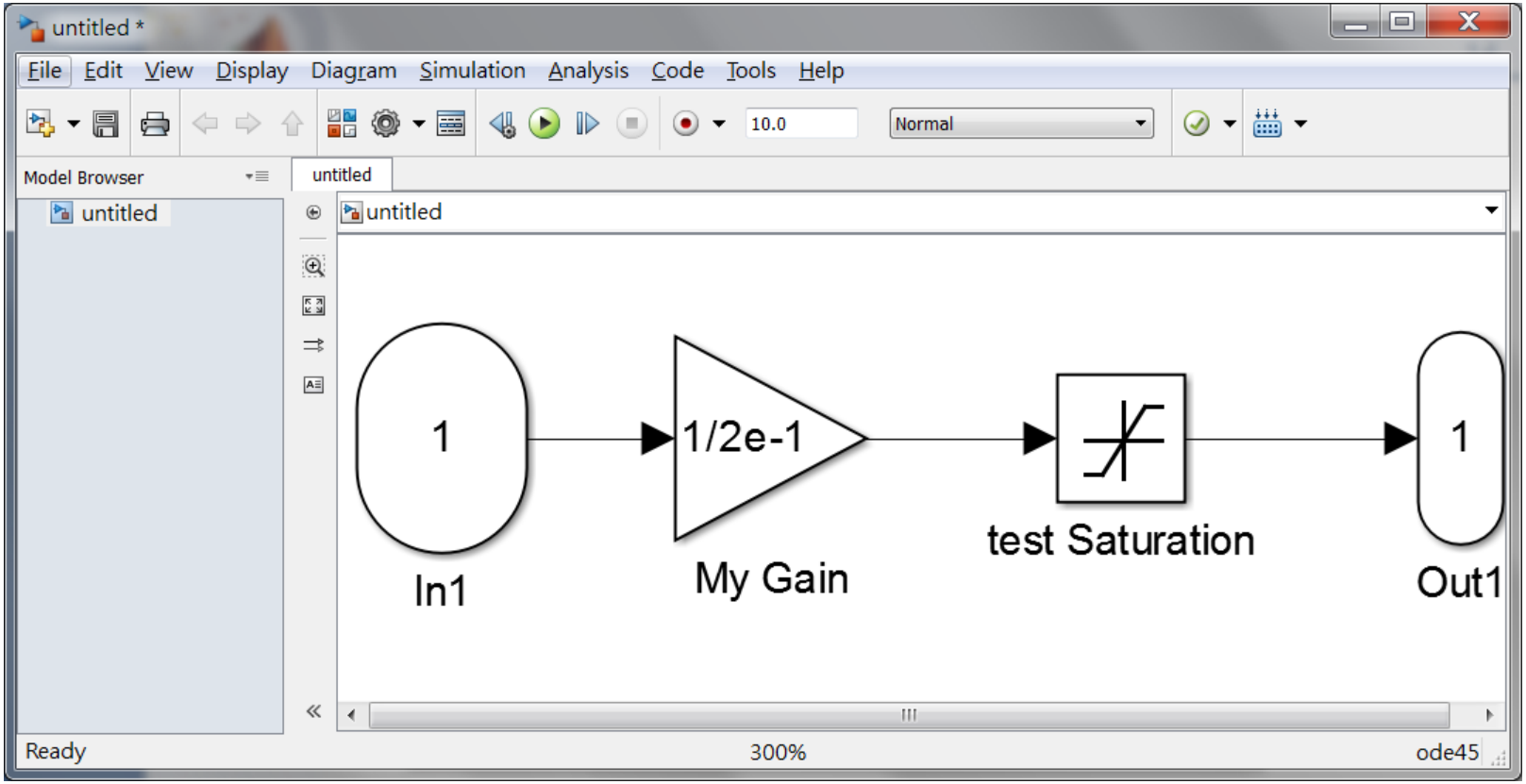
調整方塊的大小

滑鼠點到指定的方塊;方塊有四個角,透過四個角可以調整其方塊大小



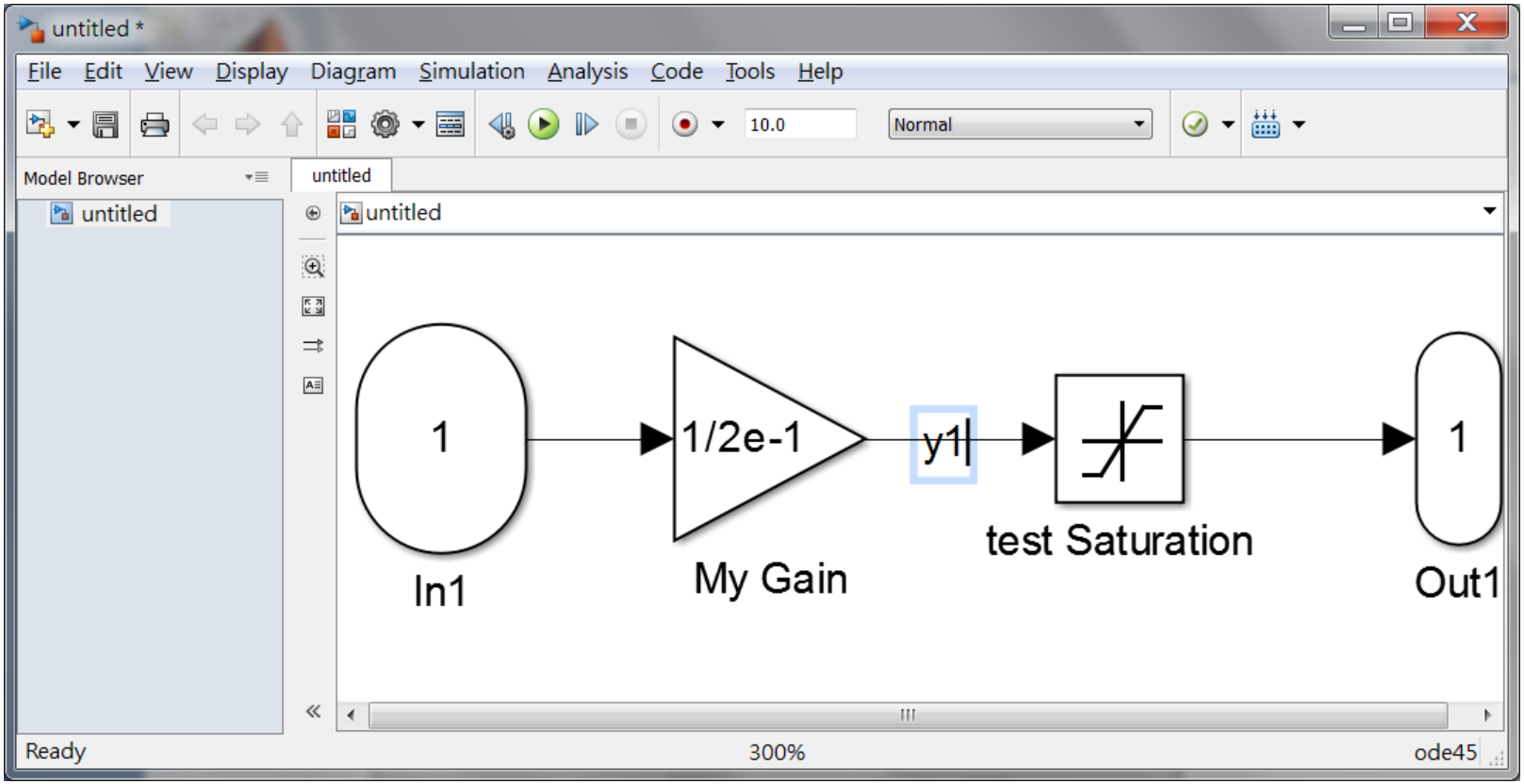
標記方塊

點選方塊標籤然後標註方塊名，每個方塊的名字都要是唯一的。



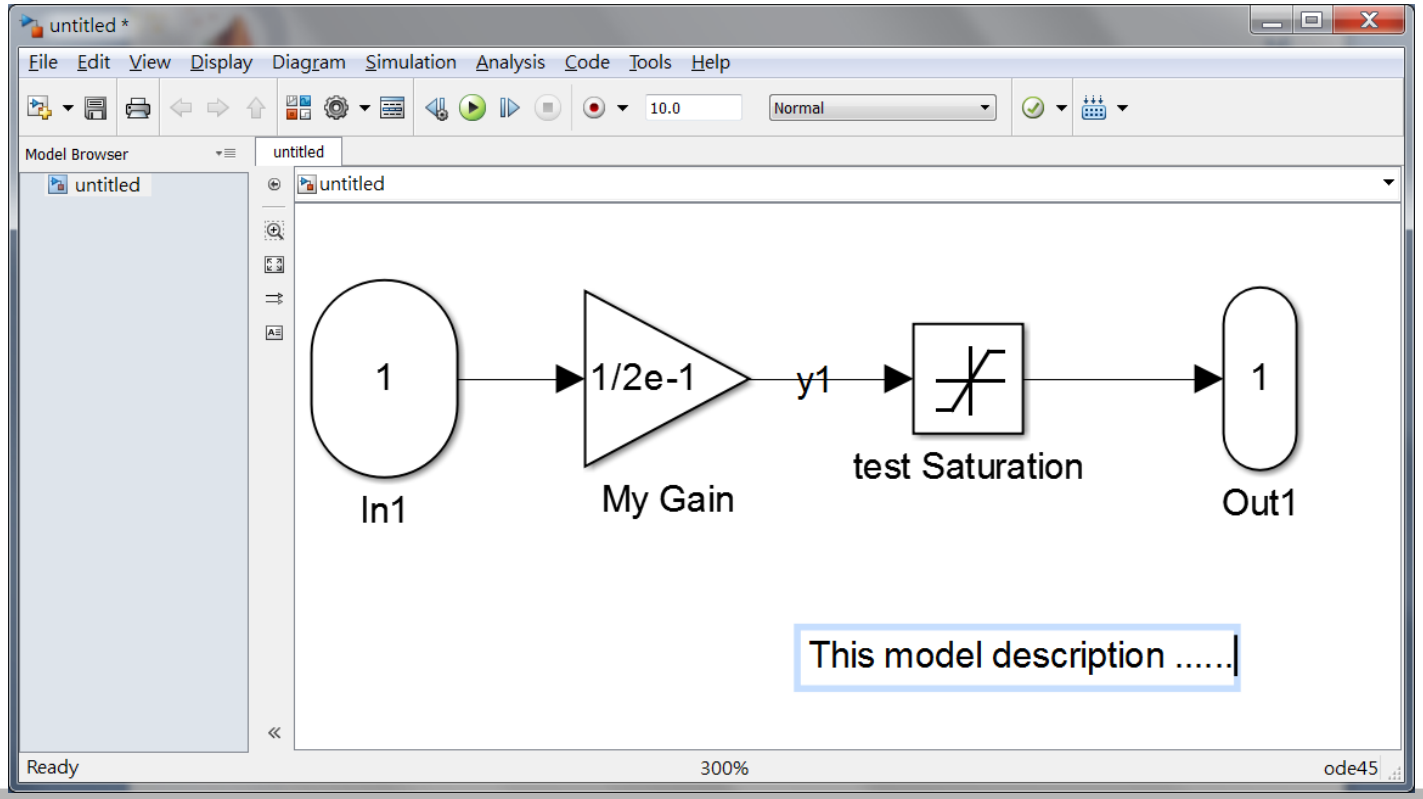
標示訊號

點訊號線兩下 輸入你要給的訊號名。

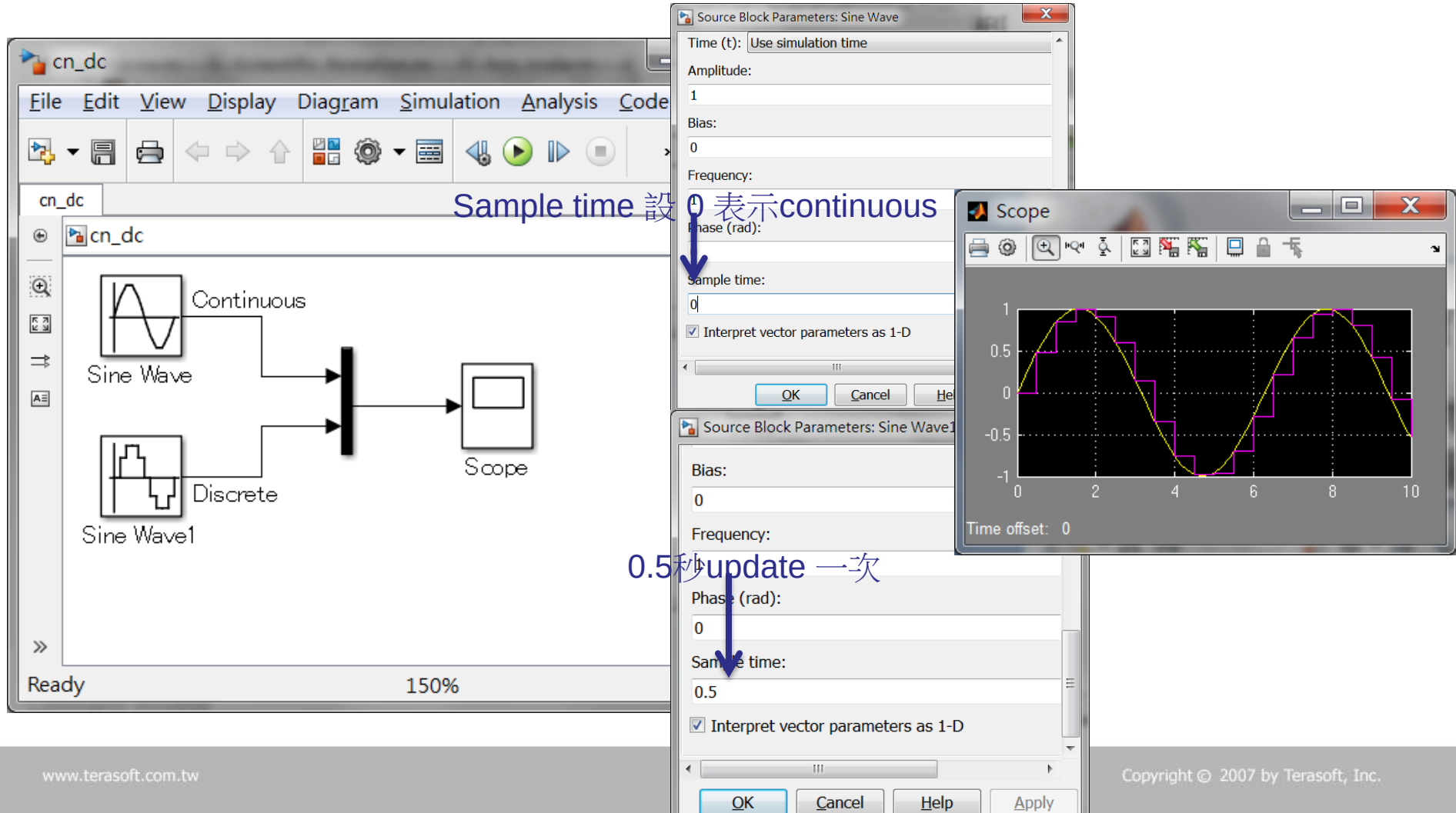


增加註解

- 可以在model 空白處 連點兩下輸入文字註解。

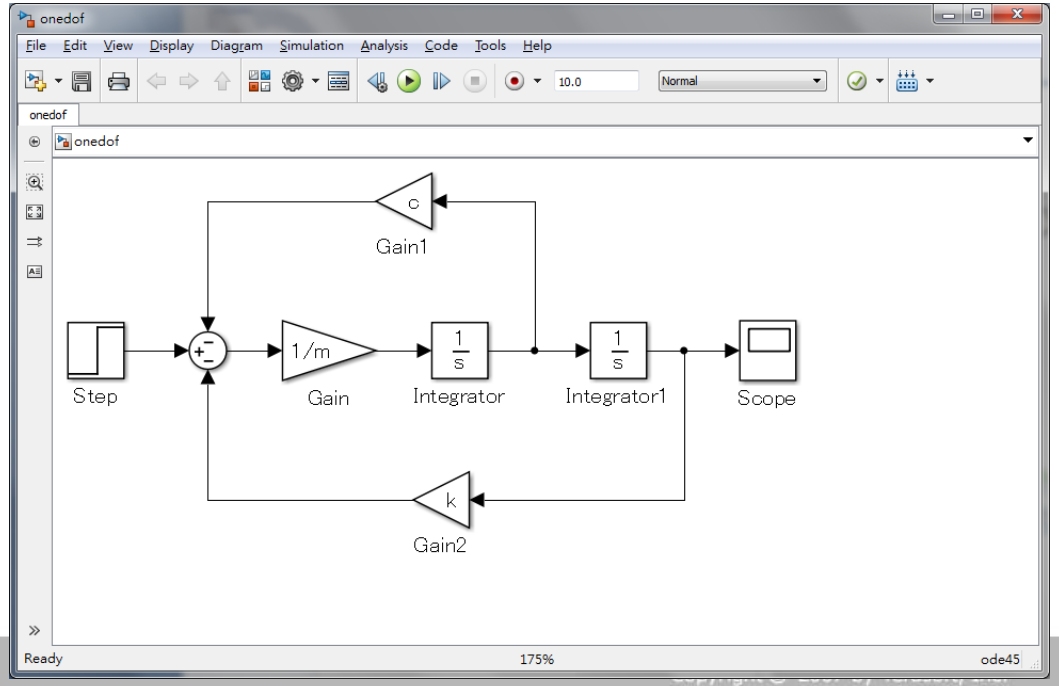


一個簡單的模型



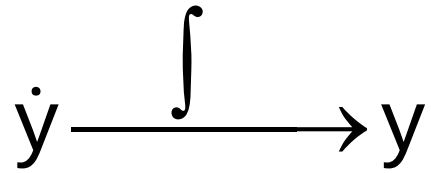
一個自由度微分方程

- 方程式如右 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$，二階方程式使用兩個積分器。
- 使用積分器實現微分。

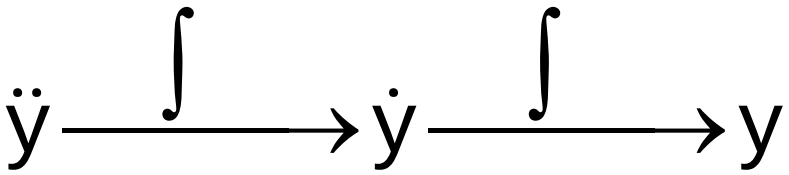


微分方程式的實現

- 使用積分器建立連續系統



- 二次微分經過積分器變成一次微分項,一次微分的函數經過積分得原函數



- 建立不同狀態的代數關係
- 設定積分器的初始條件

連續時間系統:使用積分器(in continuous block library)

- 系統的輸出是連續的變化

- 用積分的方式表示輸入與輸出的關係

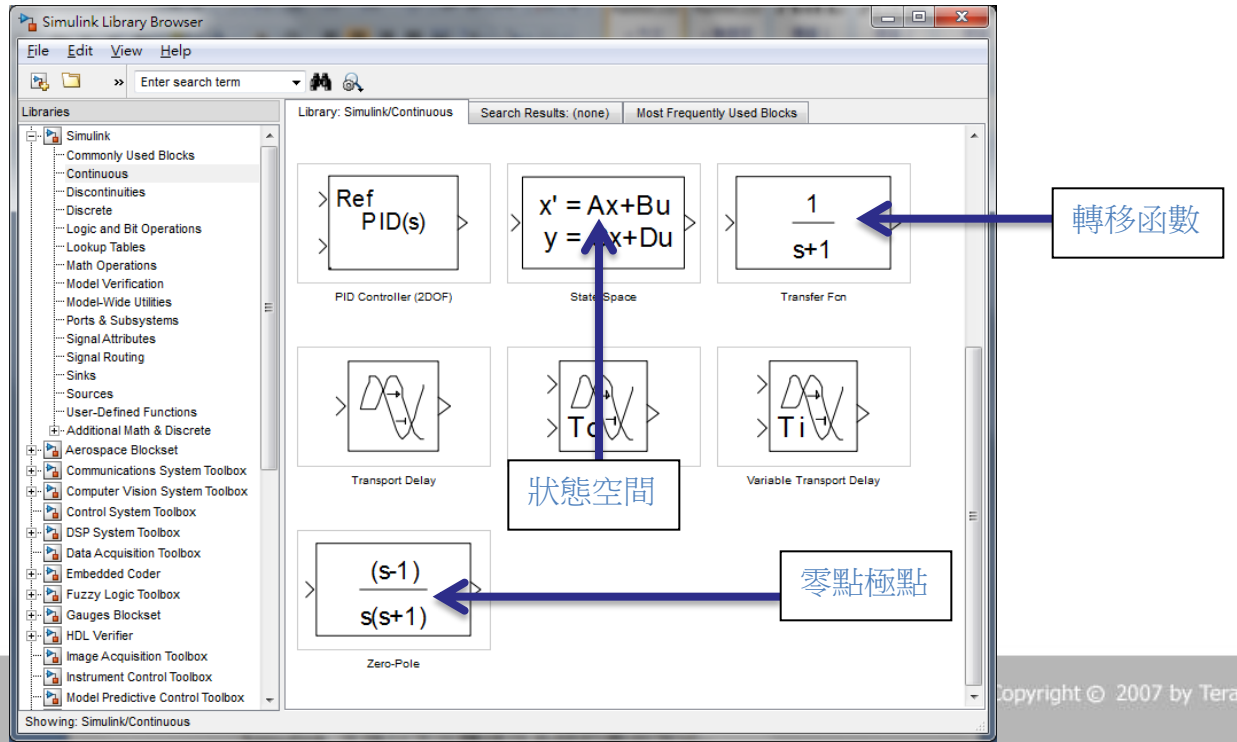
  Example: 積分器(Integrator)

  Output is the integral of the input

$$\dot{y} = u \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{aligned}$$

三種線性系統的表示方法

- 轉移函數(transfer function)
- 狀態空間(state space)
- 零點極點(zero-pole)



線性系統的表示方法:transfer function

- 假設 initial value 等於零

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \longrightarrow mX(s)s^2 + cX(s)s + kX(s) = F(s)$$

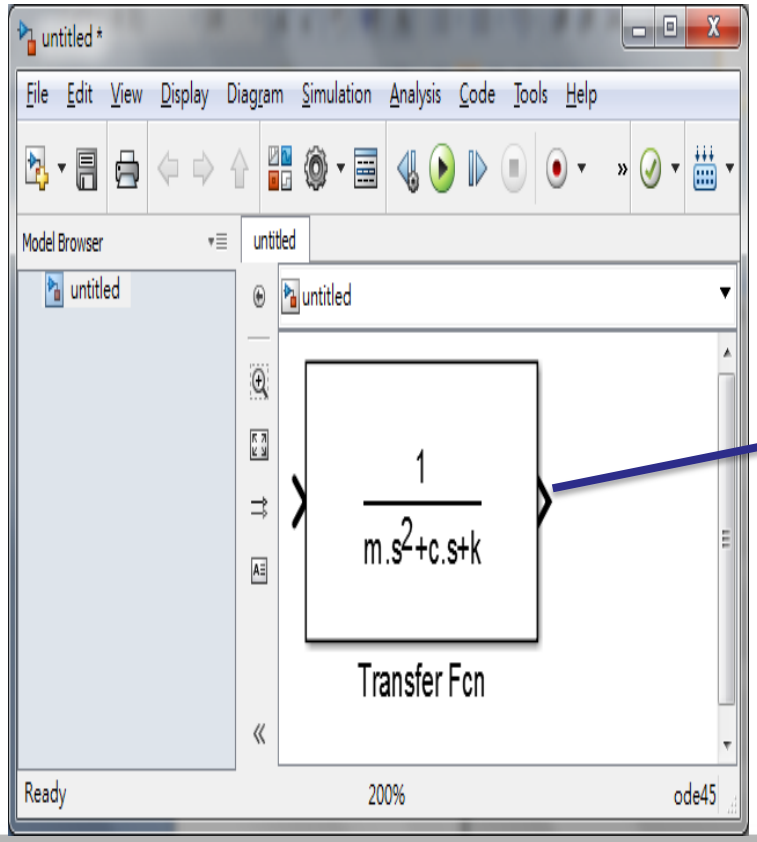
Laplace transform

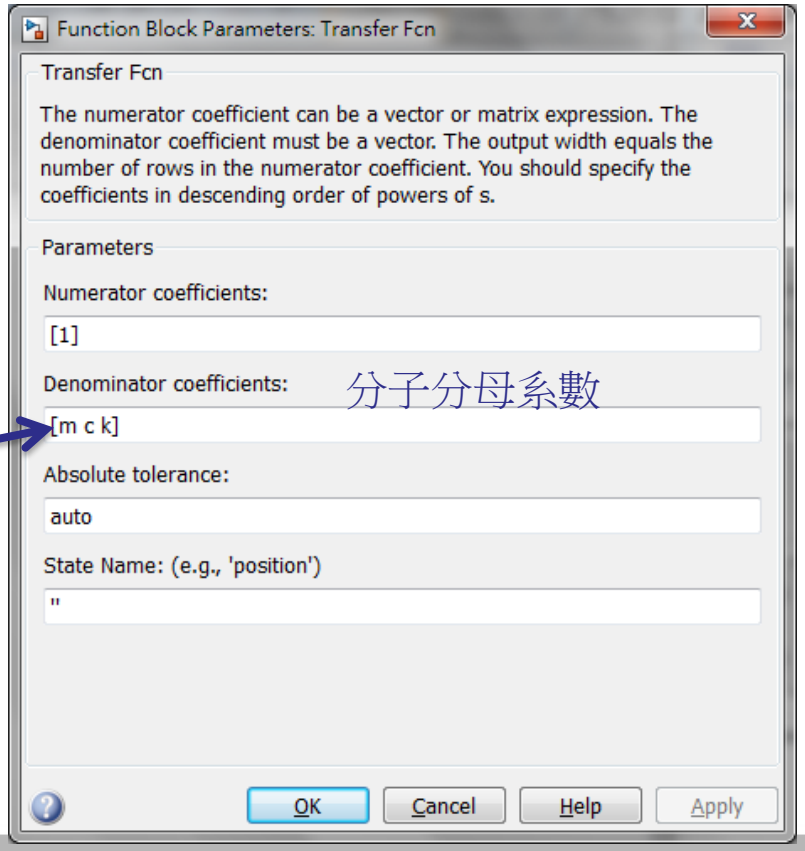
整理得如下轉移函數

$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Transfer function block 設定

$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$





狀態空間表示法

- 常用表示法如下

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

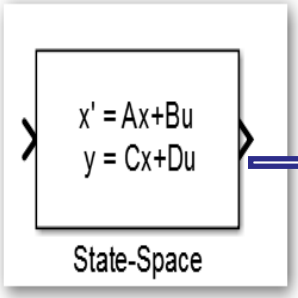
- Ex: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$

Assume $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$

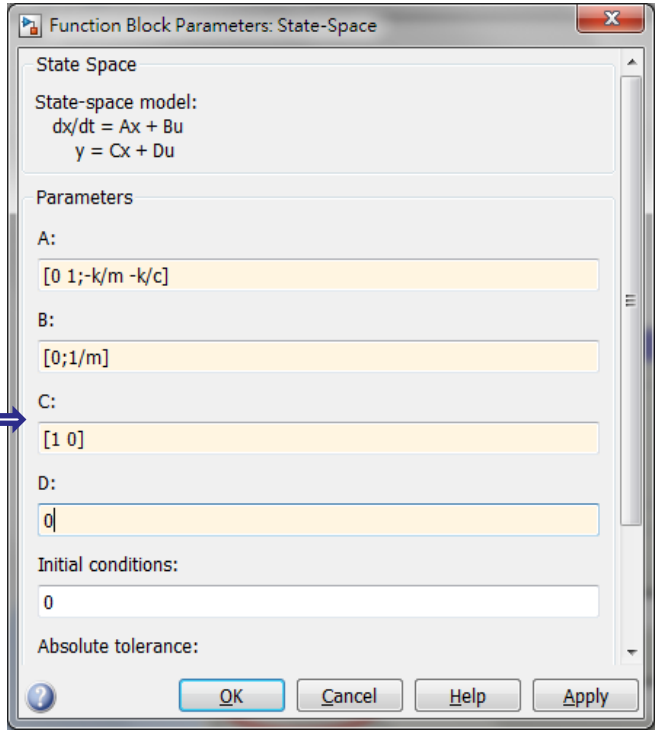
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 + cx_2 + kx_1 = f \end{cases}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f$$

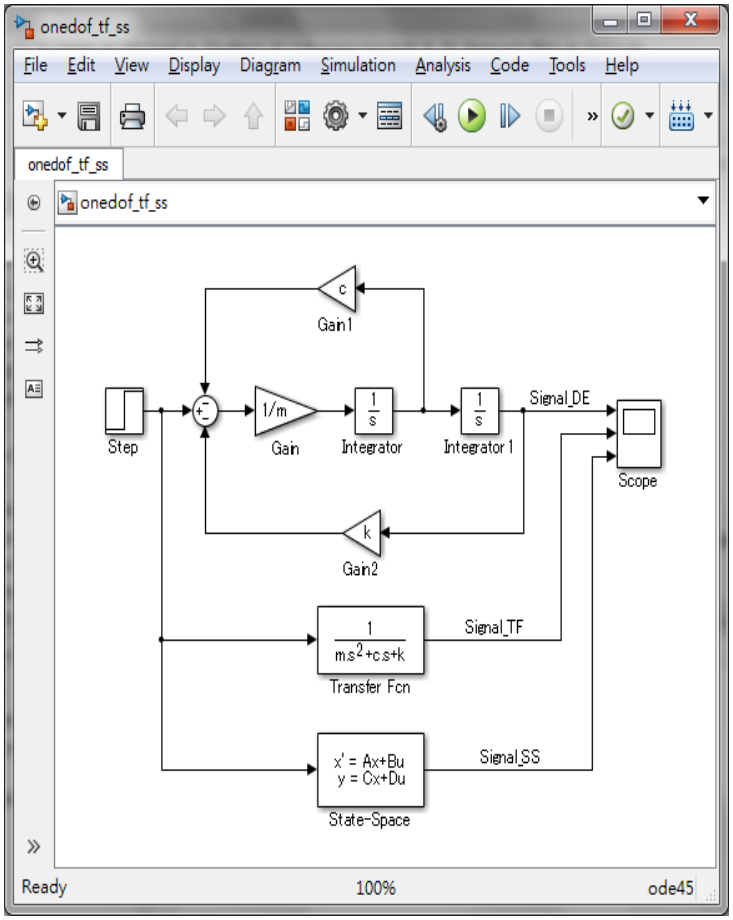
$$y = [1\ 0]X + [0]f$$

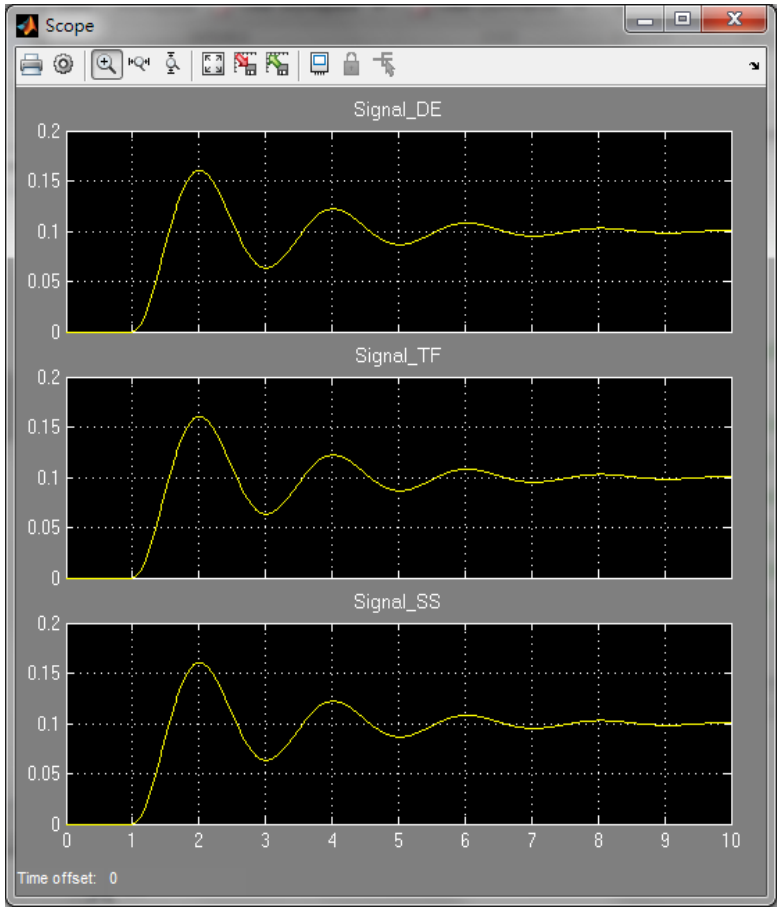


A,B,C,D系數



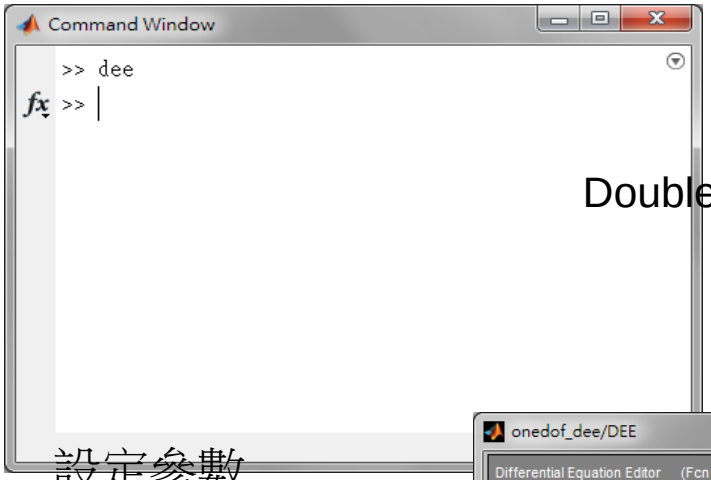
Simulation結果比較(DE,TF, SS)



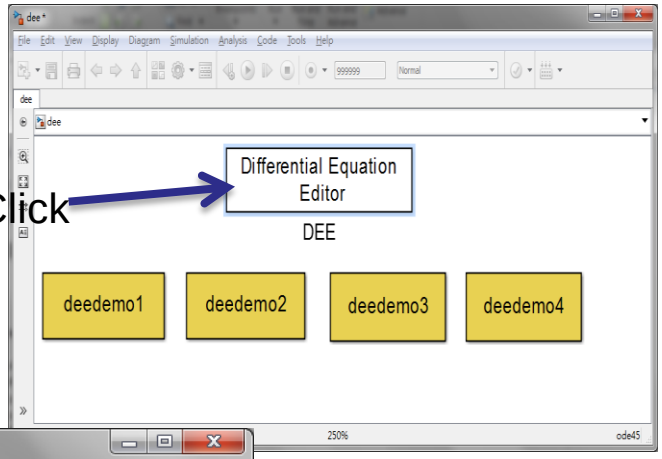


微分方程式編輯器(differential equation editor)

Dee 的使用方法:Command Window 輸入dee

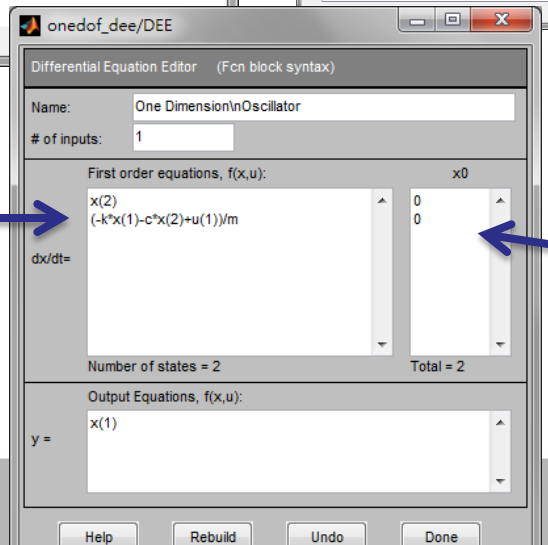


Double Click



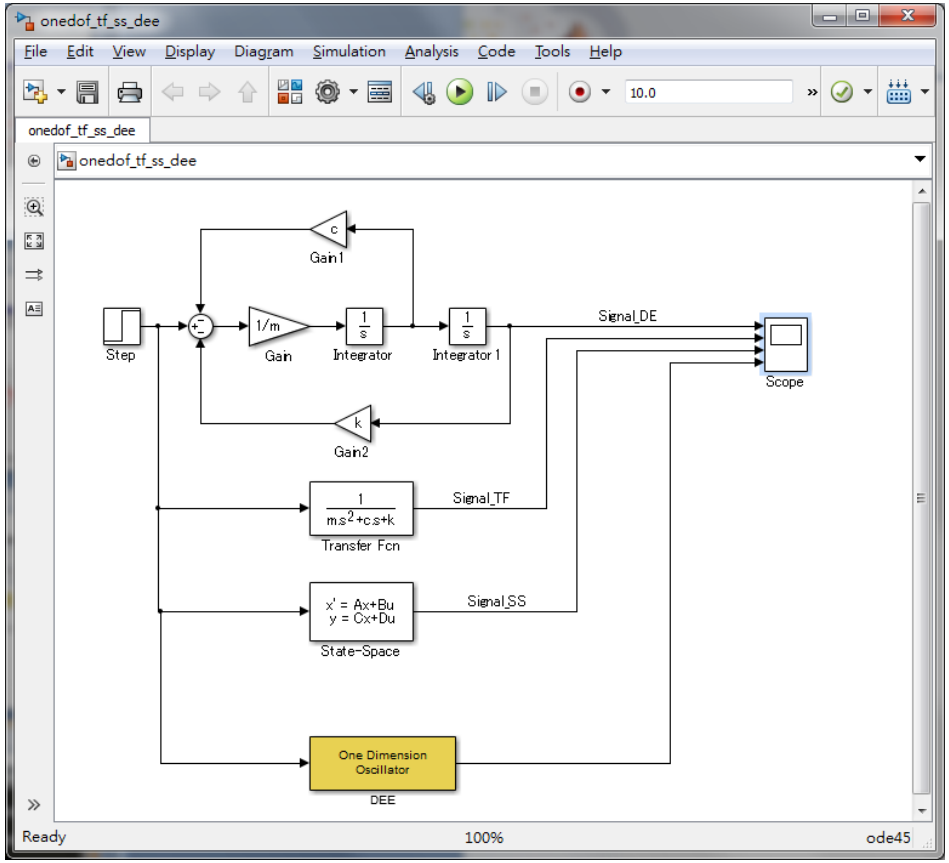
設定參數

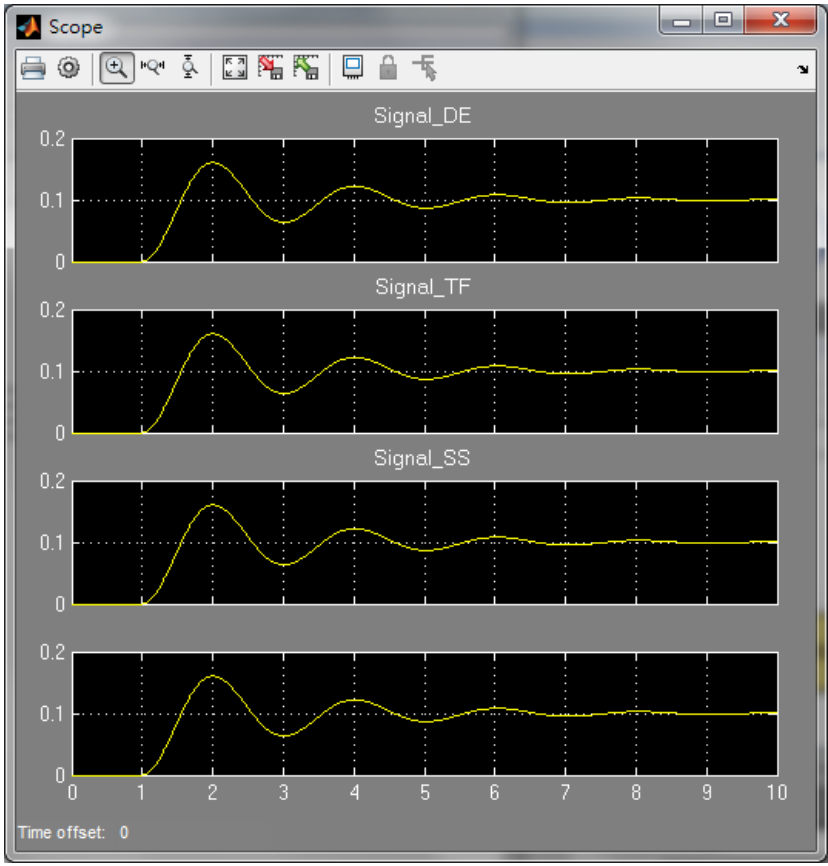
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{f}{m} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

模擬結果比較(DE, TF, SS,DEE)





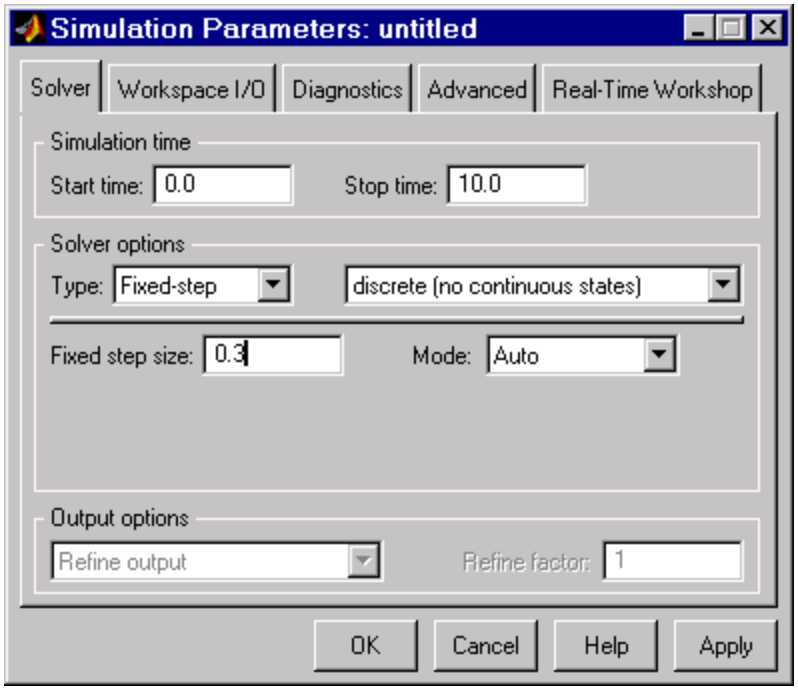
Exercise:非線性差分方程

- 每年的人口跟以下參數有關
  1.前年的人口
  2.人口增加率,r(r=1.05)
  3.其它變數, K (K=1e6)
- p(n)=r*p(n-1)*(1-p(n-1)/K) (非線性,p(n-1) 的平方造成非線性)
- Initial value for population is needed! (p(0)=100000)

Solver參數設定

- 固定步階解題器:
  ode45,ode23…etc.
- 可變步階幾題器:

  ode8,ode5….etc.
- 離散解題器

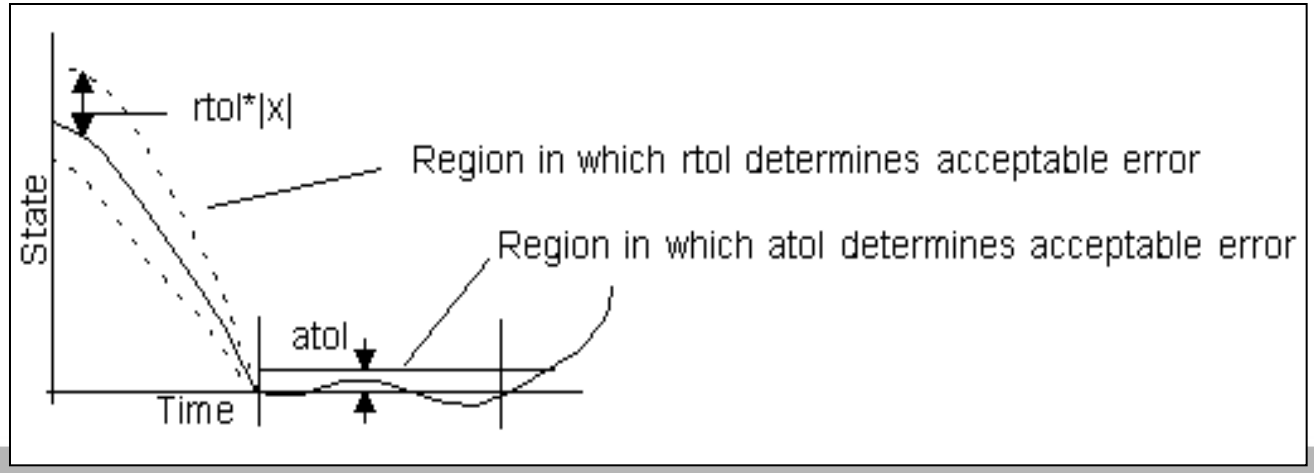


連續時間解題器(solver)

- 解題器的主要功能是計算方塊的輸出
- 在連續系統, 用積分來表示微分的狀態
- 不同的連續解題器使用不同的方法(數值分析)來逼近積分的結果
  - 固定步階(Fixed step): ode5, ode4, ode3, ode2, ode1
  - 可變步階(Variable step): ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t ode23tb

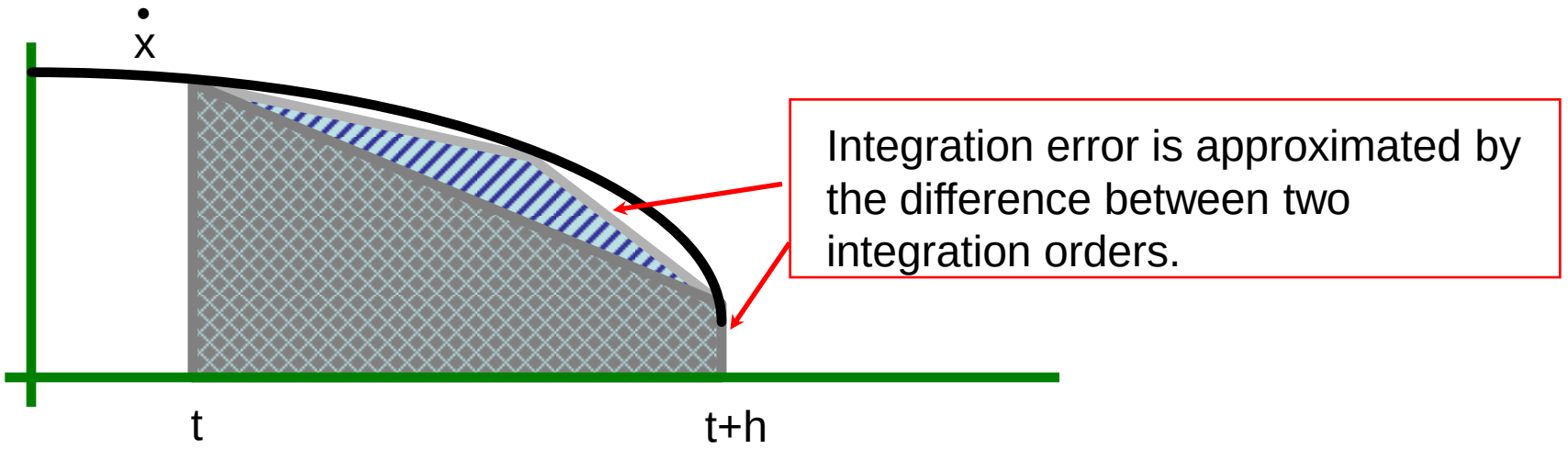
錯誤控制(Error Control)

- 可變步階解題器可以用來做錯誤的控制
- 絕對誤差: 積分錯誤的上限
- 相對誤差: 積分錯誤的上限除以變數的值
- 解題器可以滿足其中之一!



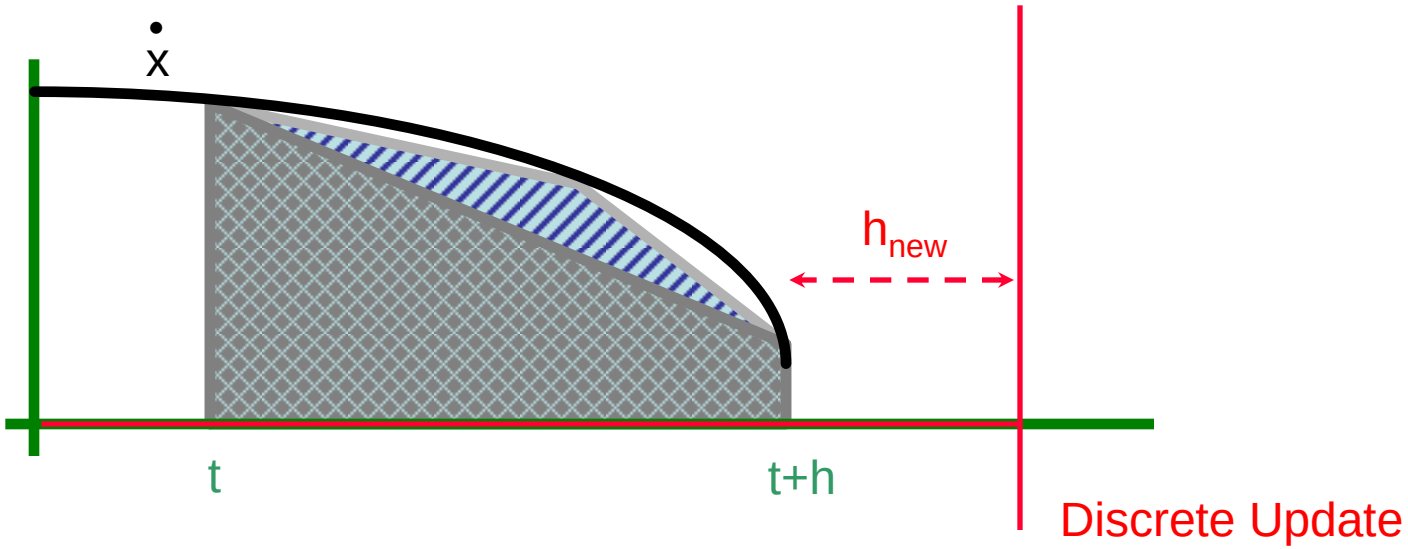
步階的計算 (Variable Step)

SIMULINK 用積分積derivatives的方式計算連續狀態



如誤差在可以接受範圍，模擬將繼續。否則將減小步階再做積分。

Step Size Calculation (Variable Step)



- 假如錯誤可以接受， 模擬將繼續。 否則將減小步階再積分。
- 步階的大小調整到適合的大小。

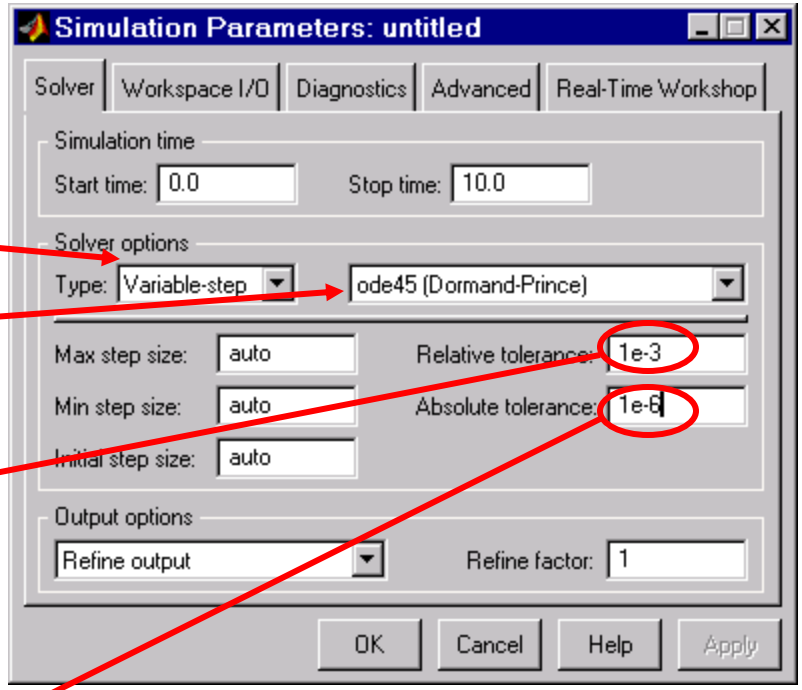
Setting Parameters

- 設定解題器
  - 選擇可變步階做誤差控制
  - 選擇適當的解題器
- 設定相對誤差

$$\frac{\text{error in x}}{x} < 1e-3$$

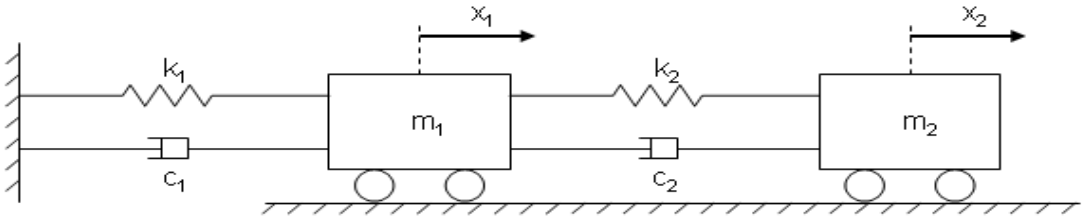
- 設定絕對誤差

$$\text{error in x} < 1e-6$$



多自由度的動態系統

- EX: 自由度為2的運動系統如下圖

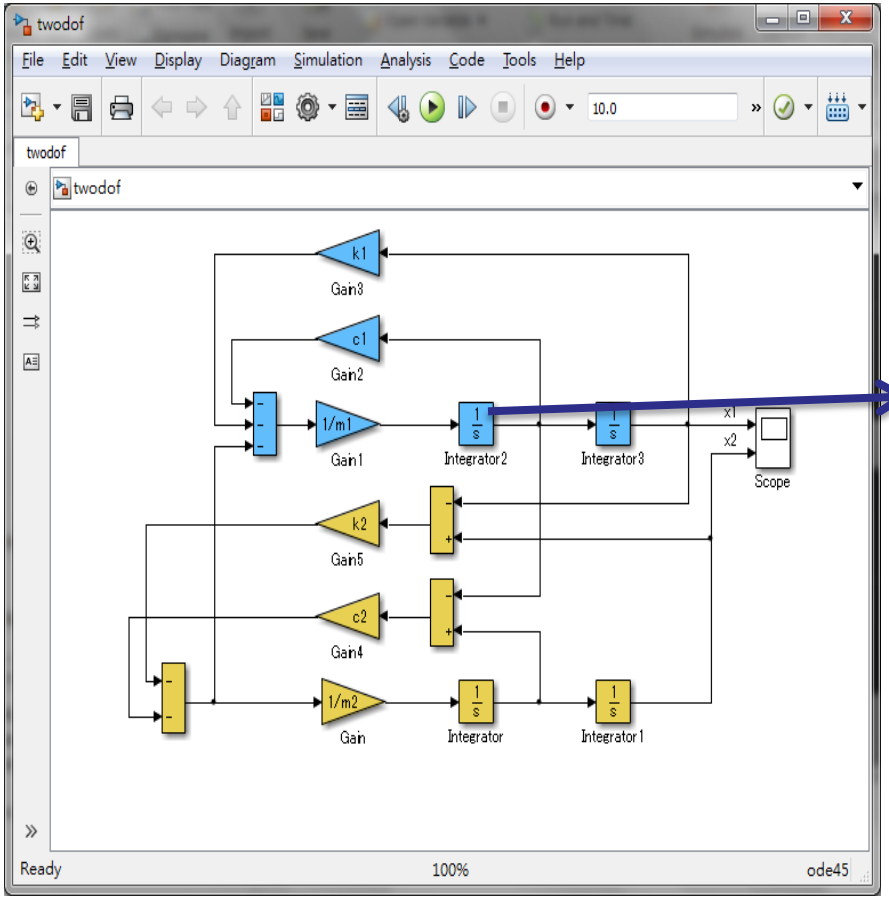


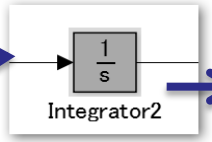
- 其聯立方程式如下

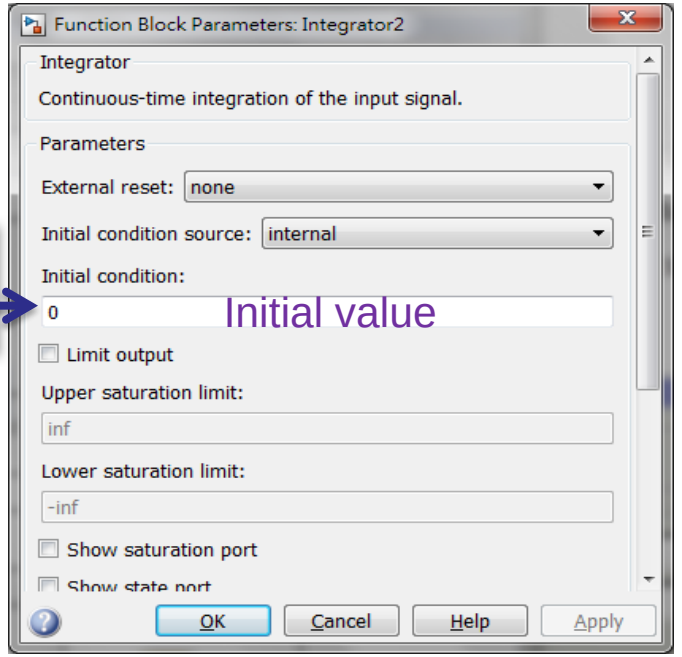
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

- initial value 為 $x_2(0) = 1, x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

自由度為2 的動態系統Simulink model 如下







非線性系統

- 線性與非線性

  假設 x_1, x_2 ，其output 為 y_1, y_2

  滿足 input 的線性組合 $\alpha x_1 + x_2$ ，其 output $\alpha y_1 + xy_2$ ， $\forall \alpha \in R$

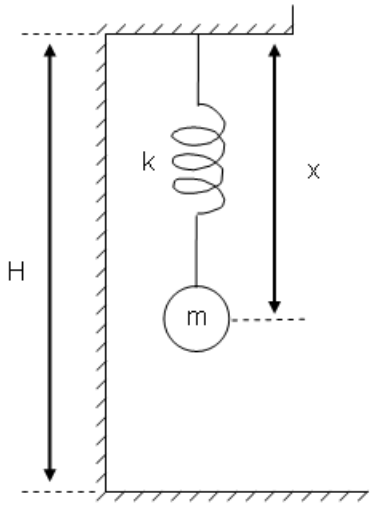
  則為線性，反之 則為非線性

Example:高空彈跳

- 運動方程式如下

$$m\ddot{x} = mg + b(x) - a_1\dot{x} - a_2|\dot{x}|\dot{x}$$

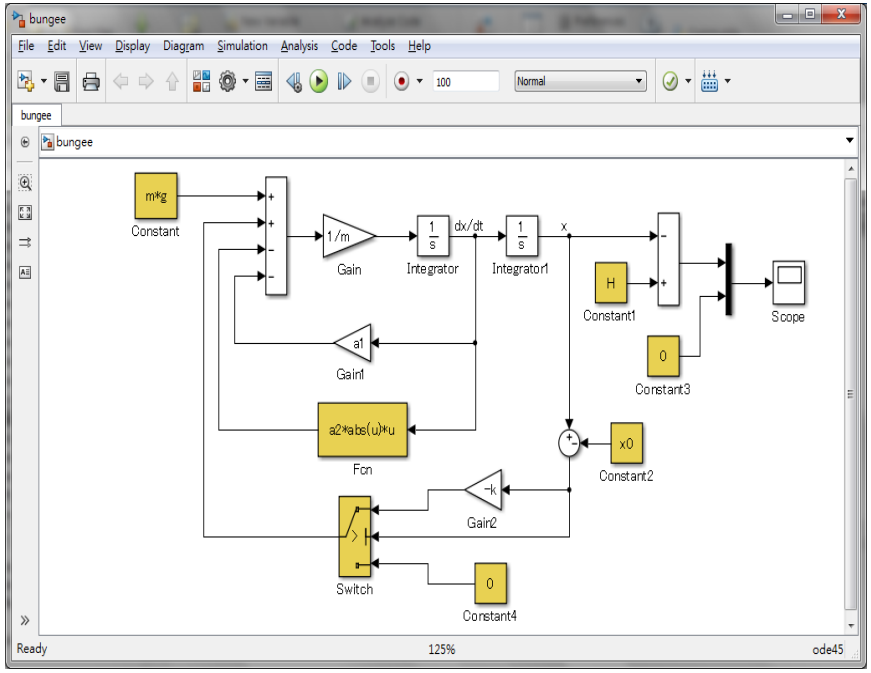
$$b(x) = \begin{cases} -k(x - x_0) & (x > x_0) \\ 0 & (x \le x_0) \end{cases}$$

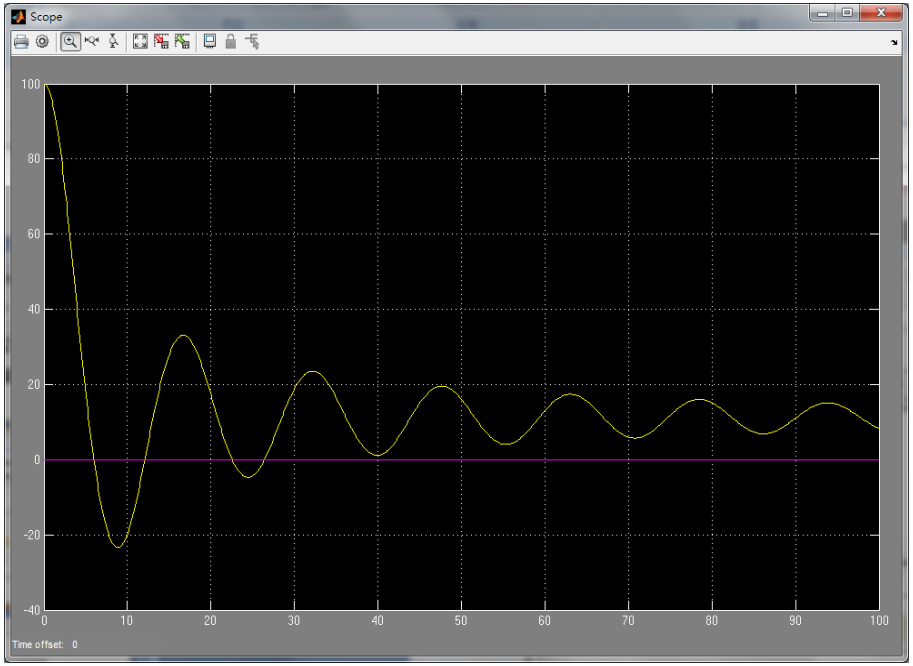


- x 是落下距離，x0 彈簧的自然長，g 重力加速度，m 質量，k 彈性係數，a_1 , a_2 空氣阻力係數。

- b(x) 及 $a_2|\dot{x}|\dot{x}$ 非線性項， 所以此運動方程式非線性微分方程式。直接建模如下。

Nonlinear Simulink model 與模擬結果





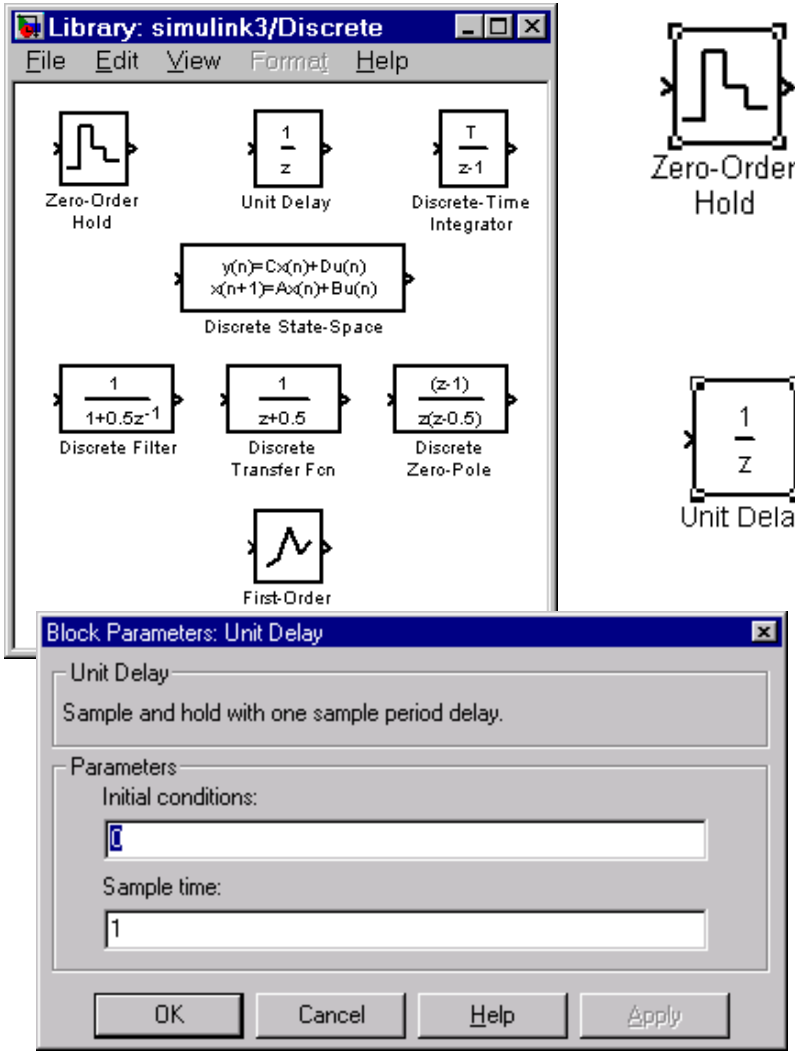
離散時間系統建構

- 固定時間間隔更新系統的狀態
- 輸出跟現在的輸入或前一個輸入或輸出有關

  y(n)=u(n)+u(n-1)+3y(n-1)

  time=n x sampling time
- 離散動態系統: 離散狀態(discrete state)
  - 前一個output 表示一個 狀態(state)
  - 離散狀態相當於存前一個訊號值的記憶體！

離散系統函式庫



- Zero-Order Hold
  - 把連續的訊號轉成離散的訊號
  - 設定取樣速率

- Unit Delay
  - Input延遲一個單位時間 (sampling time)
  - 設定initial value

離散系統:差分方程 (Difference equation) 使用Unit Delay

設計步驟

- 決定block需要幾個delay:

  Ex: y(n-1) 表示一個delay; y(n-2)表示兩個delay
- 根據方程式 連接各個input 與output blocks
- 設定初始值(initial value).
- 設定取樣時間(sampling time).

線性離散系統

- Z-transform
  - x(n) --> X(z)
  - x(n-1) --> $z^{-1}X(z)$ (delay one unit)
- y(n)=u(n)+u(n-1)+3y(n-1)

  -->$Y(z)=U(z)+z^{-1}U(z)+3z^{-1}Y(z)$

  --> $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

  Filter representation: num=[1 1], den=[1 -3]

Z-Domain表示式

- 濾波器(filter): num=[n0 n1 n2], den=[d0 d1]

$$\frac{n_0 + n_1 z^{-1} + n_2 z^{-2}}{d_0 + d_1 z^{-1}}$$

- 轉移函數(transfer function): num=[n0 n1 n2], den=[d0 d1 0]

$$\frac{n_0 z^2 + n_1 z^1 + n_2}{d_0 z^2 + d_1 z}$$

- 零點極點Zero-pole: gain=K, zeros=[z1 z2], poles=[0 p1]

$$K\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z(z - p_1)}$$

Moving average filter 5階

- Moving average filter 方程式如下

$$y_n = \frac{1}{5}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4})$$

計算目前的 output 與前四個 output 的平均

- $$Y(z) = \frac{1}{5}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\right)U(z)$$

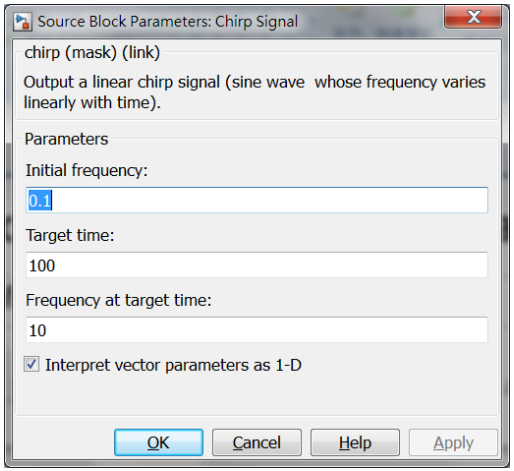
- $$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{5}$$

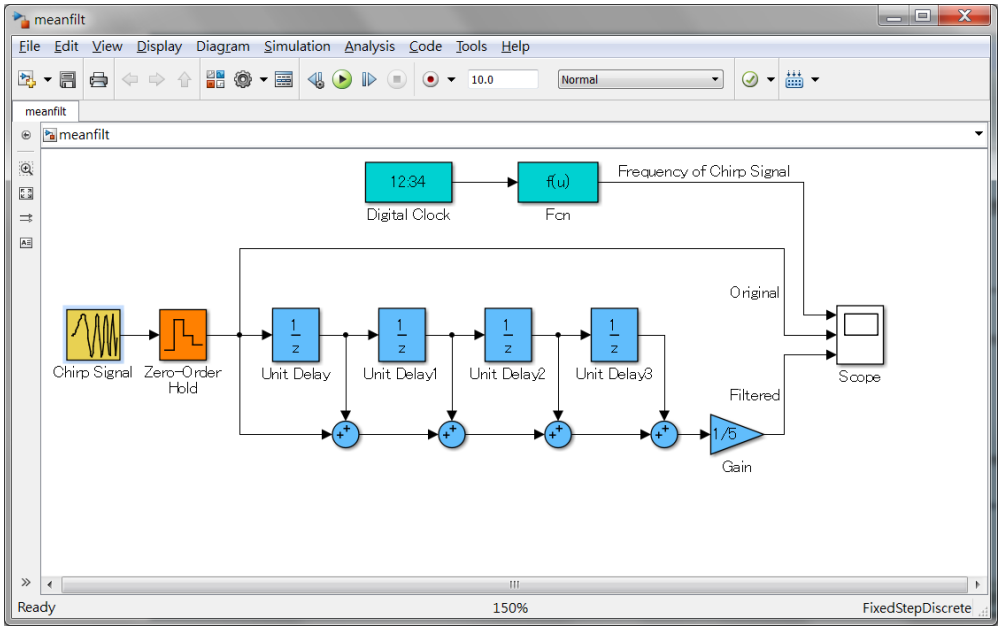
Moving average filter 5階(續)

- 組成的 Simulink model 如下

Chirp f 設定如下

$$f(t) = f_0 + \frac{f_{target} - f_0}{T_{target}} \times t$$

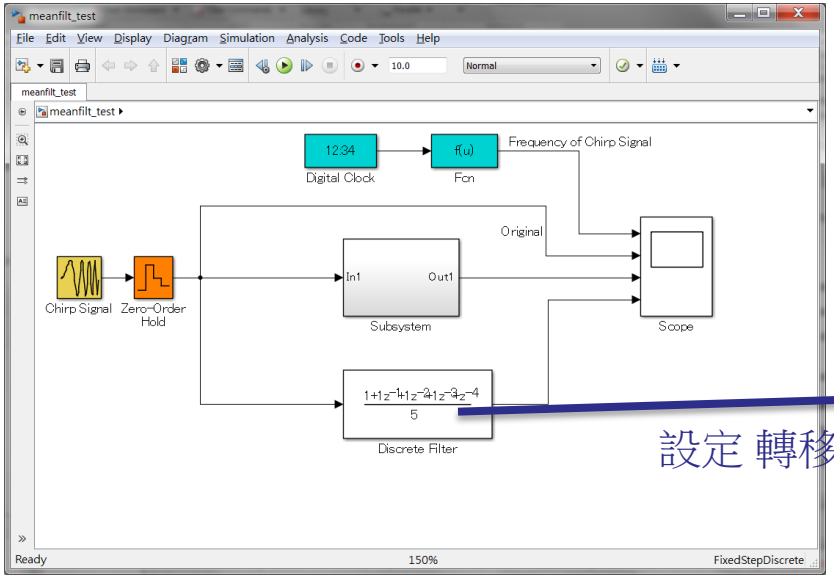


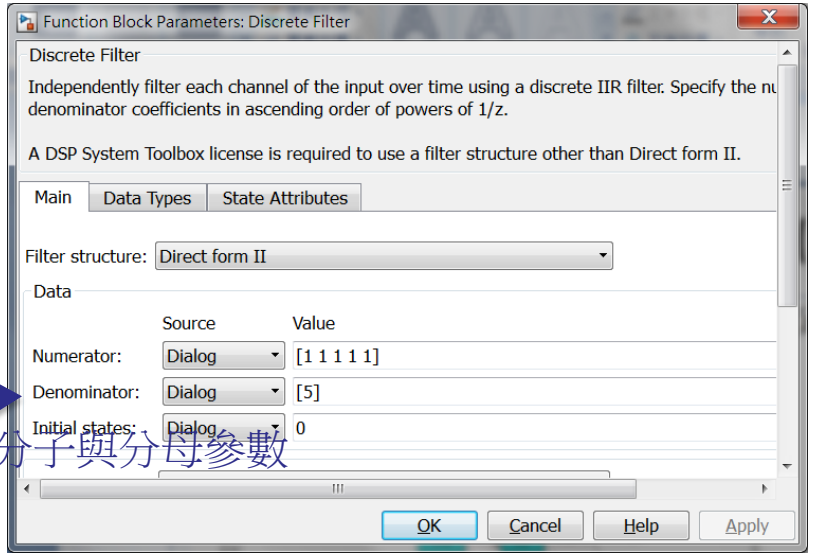


計算目前的 output 與前四個 output 的平均

Moving average filter 5階(續)

- 可以直接透過discrete filter block 設定 轉移函數分子與分母參數





設定 轉移函數分子與分母參數

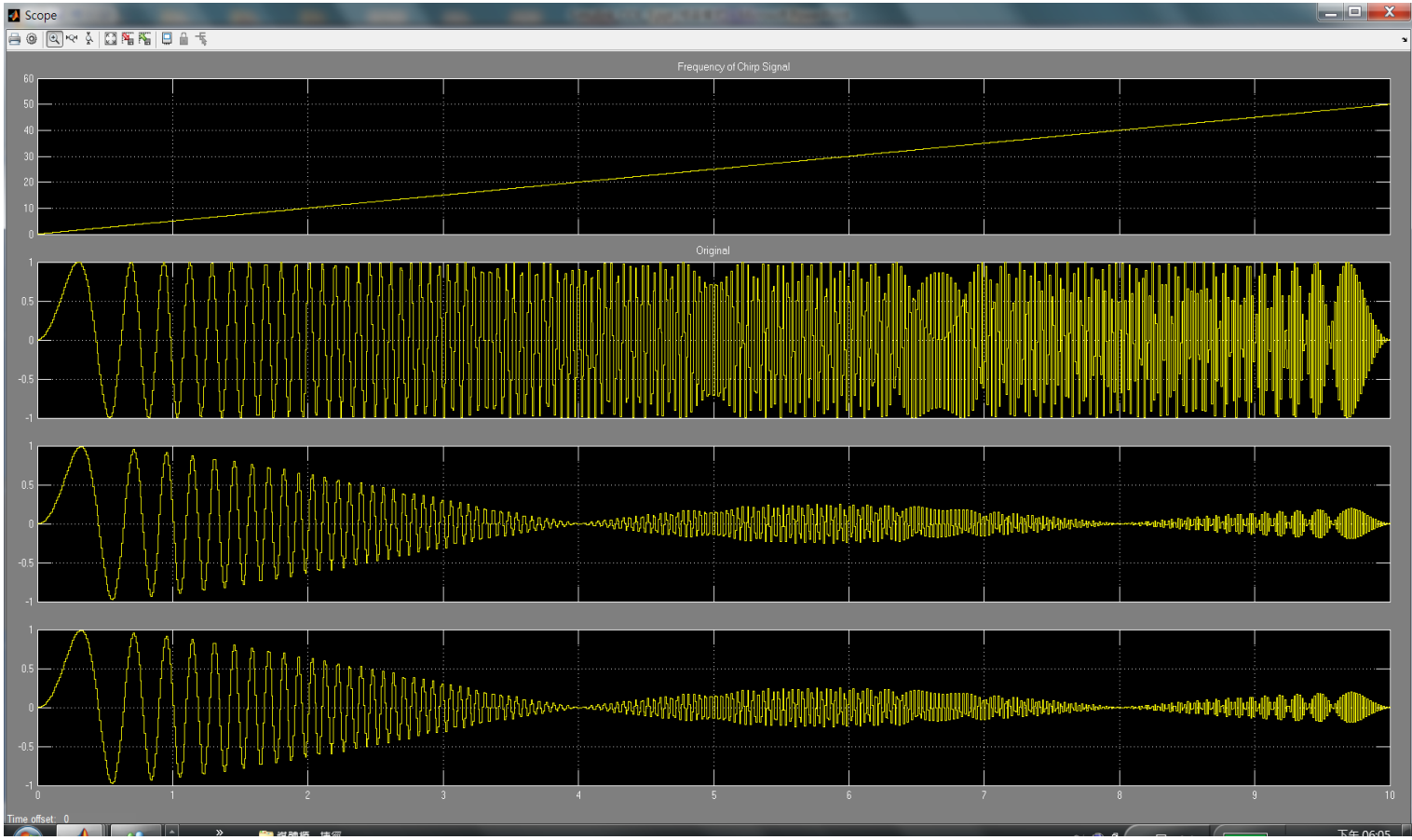
比較模擬結果

Chirp signal frequency 0.1-50Hz

Chirp signal 原始訊號

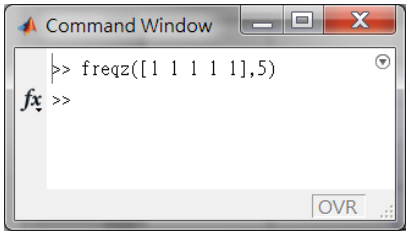
Chirp signal 經過moving average filter

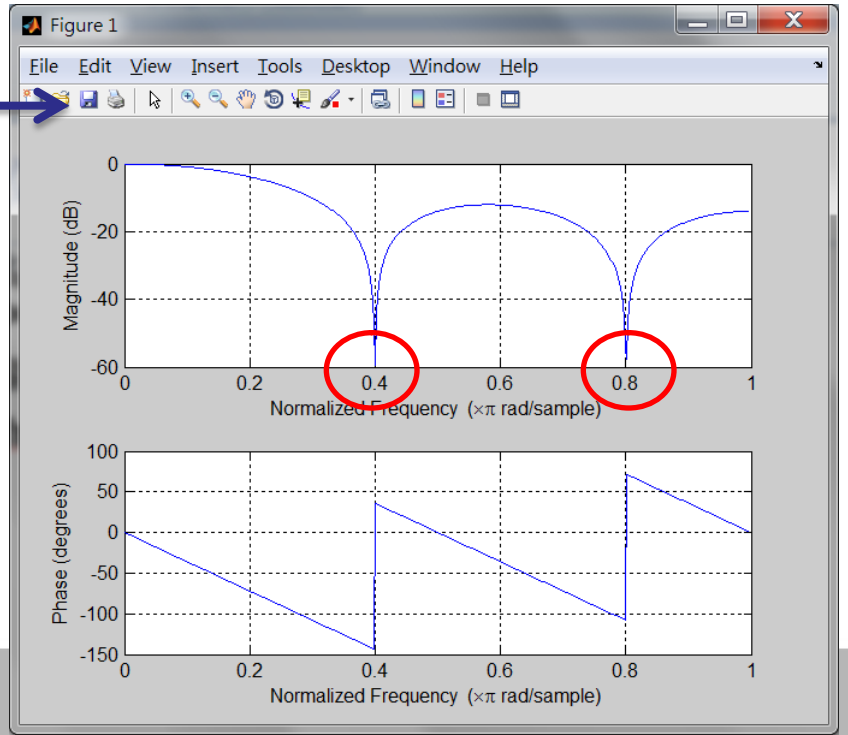
Chirp signal 經過moving average filter 使用discrete filter block



比較模擬結果(續)

- 由結果知:直接建模實現濾波器與用discrete filter block輸入濾波器分子分母參數 結果是一致的。
- 由圖知 訊號在頻率20 Hz 與 40 Hz 被壓抑。
- 由freqz 指令做頻率響應圖驗證。



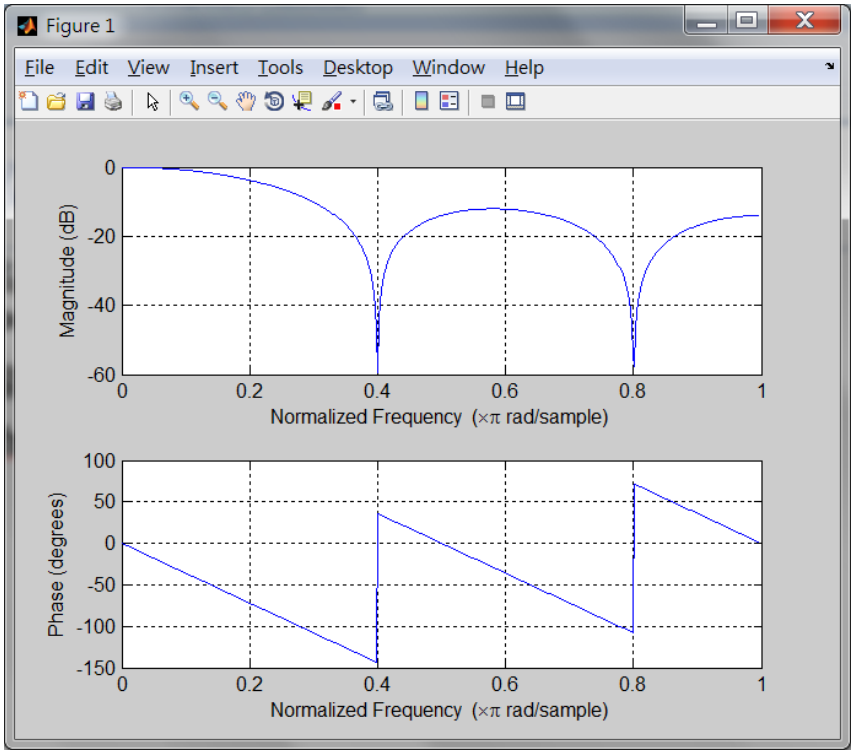


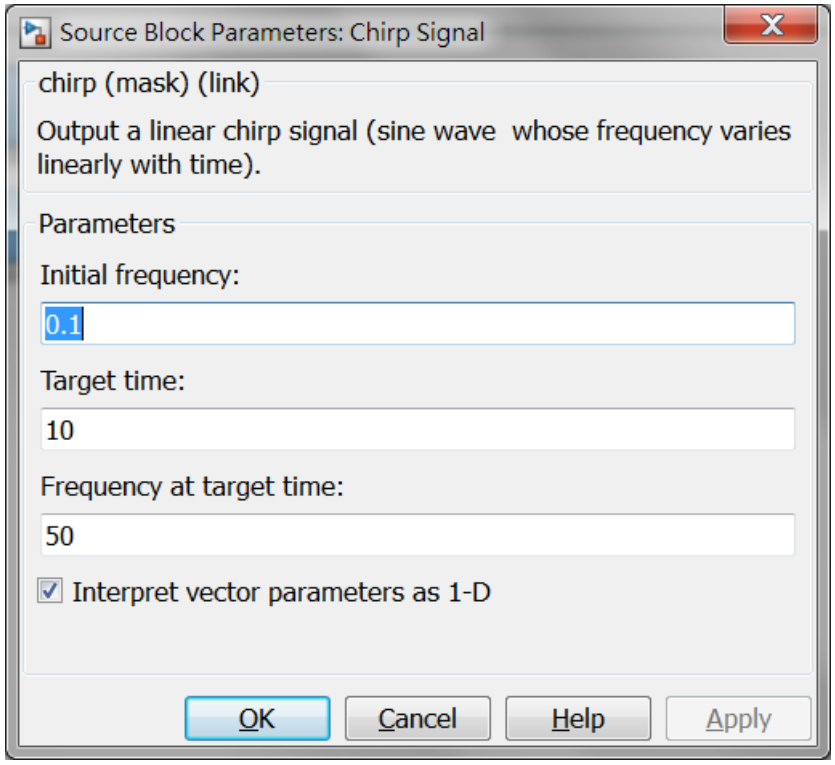
振幅響應

相位響應

比較模擬結果(續)

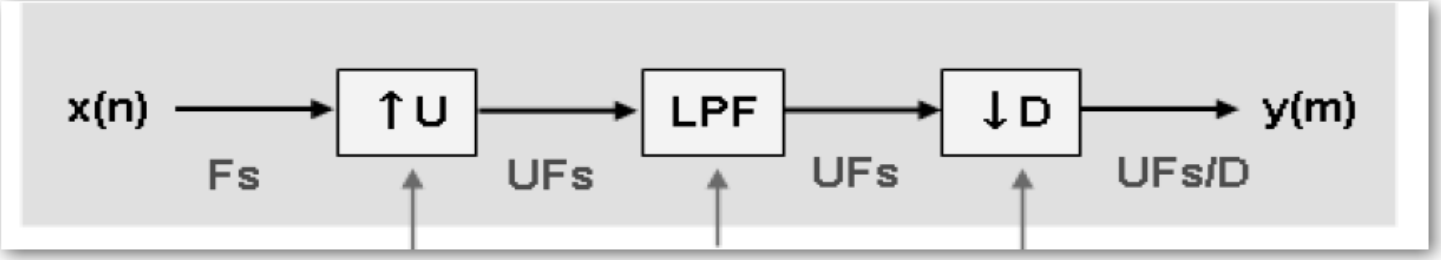
- 因為頻率軸經過正規劃， Normalized Frequency 0~1 對應到0~50Hz ，所以0.4與0.8對應到20 與40 Hz 。



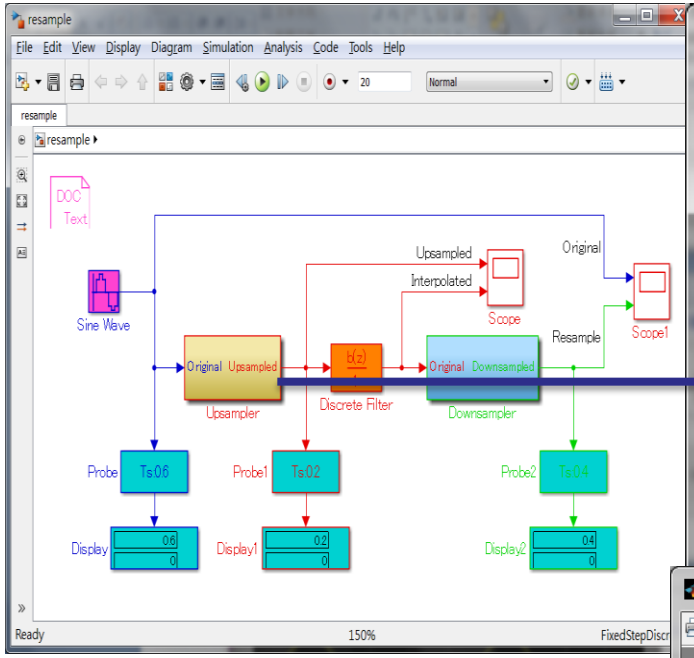


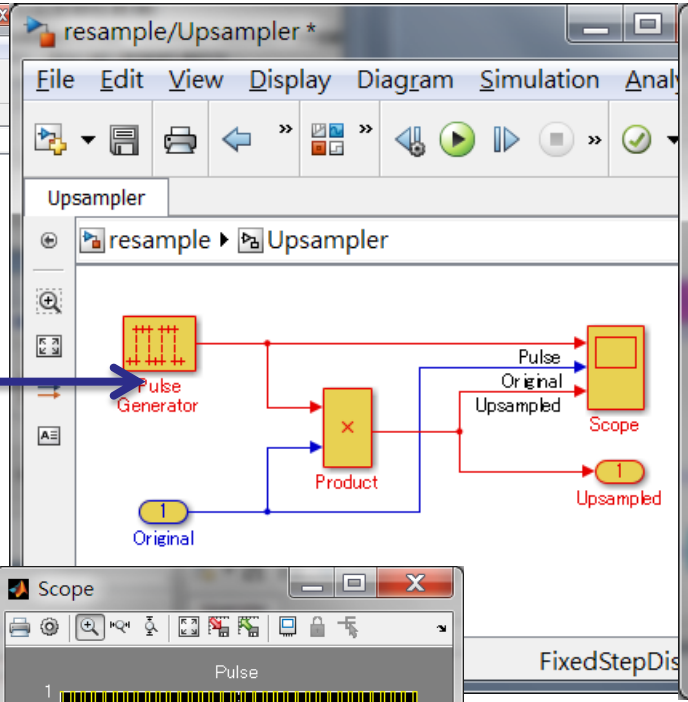
Multi-rate system 模擬

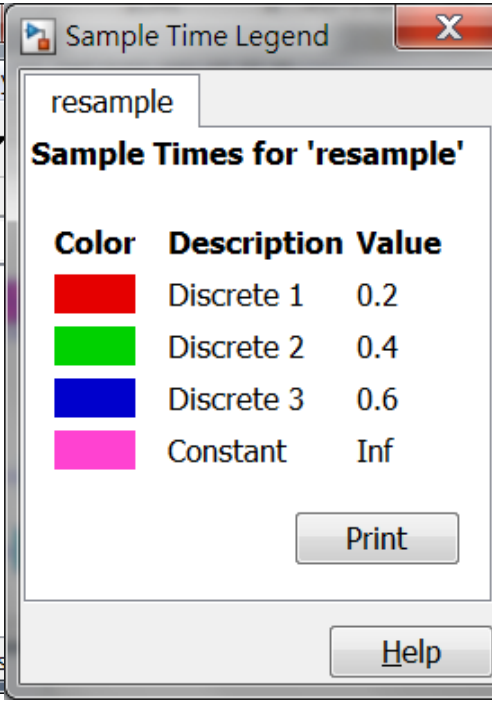
- 不同取樣速率的離散系統：upsamlping, downsampling, decimation, interpolation
- LPF(anti-aliasing filter) 加在 Upsampling 之後 downsampling 之前

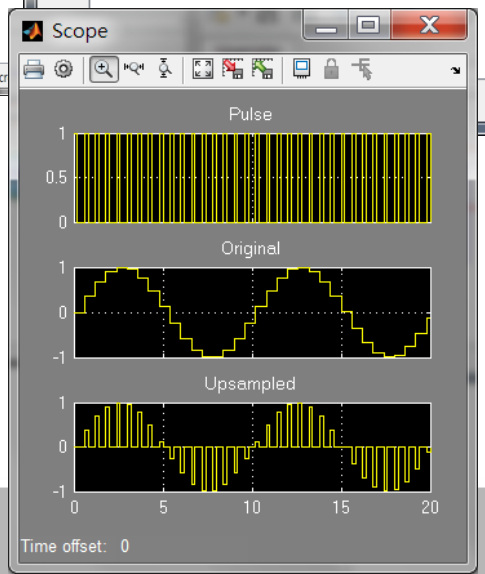


Example：Multi-rate model (up sampling)



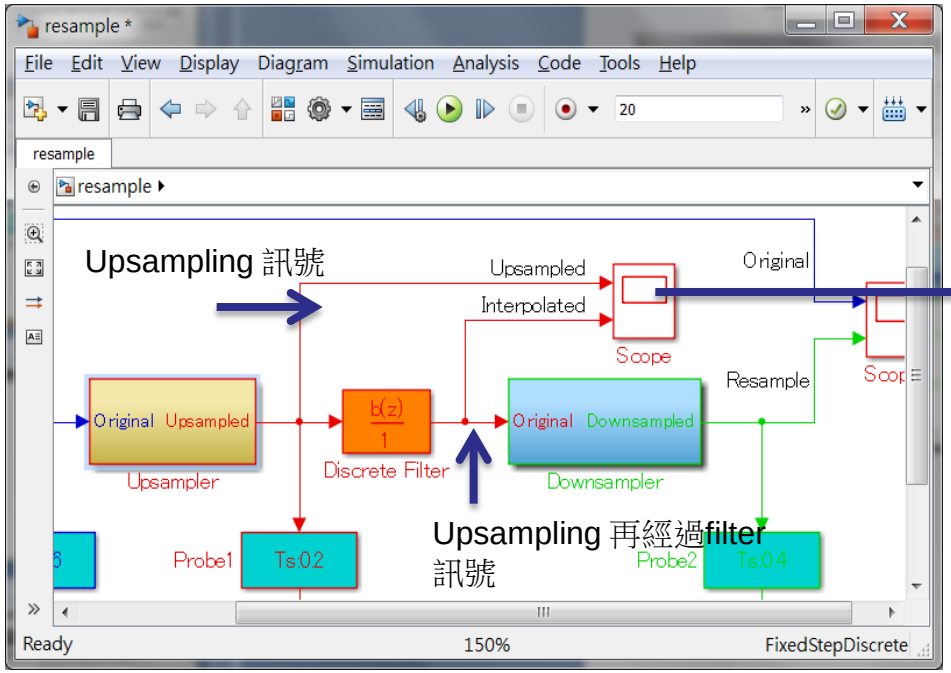


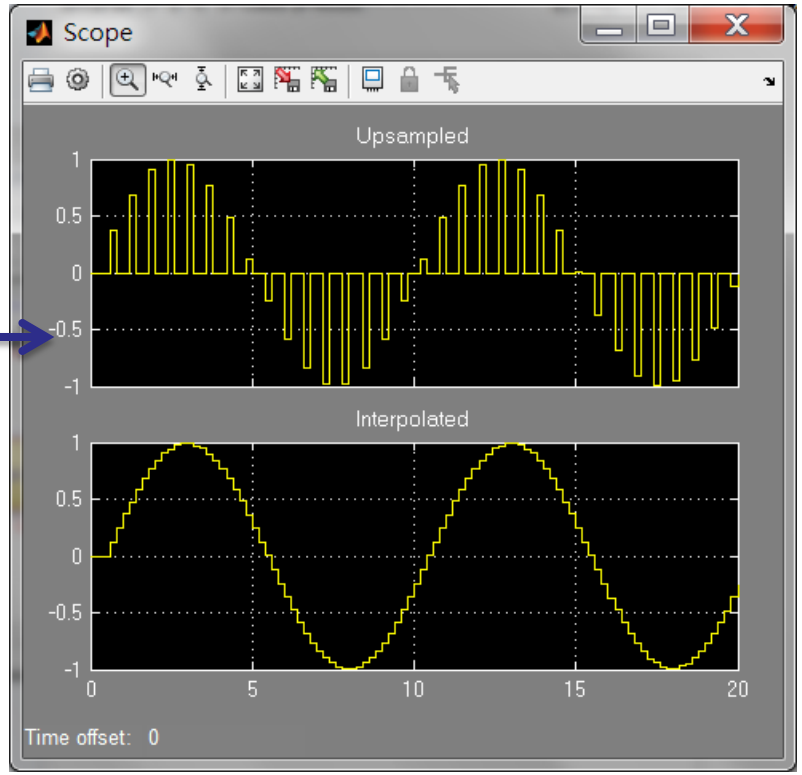




Sampling time從0.6sec 到 0.2sec

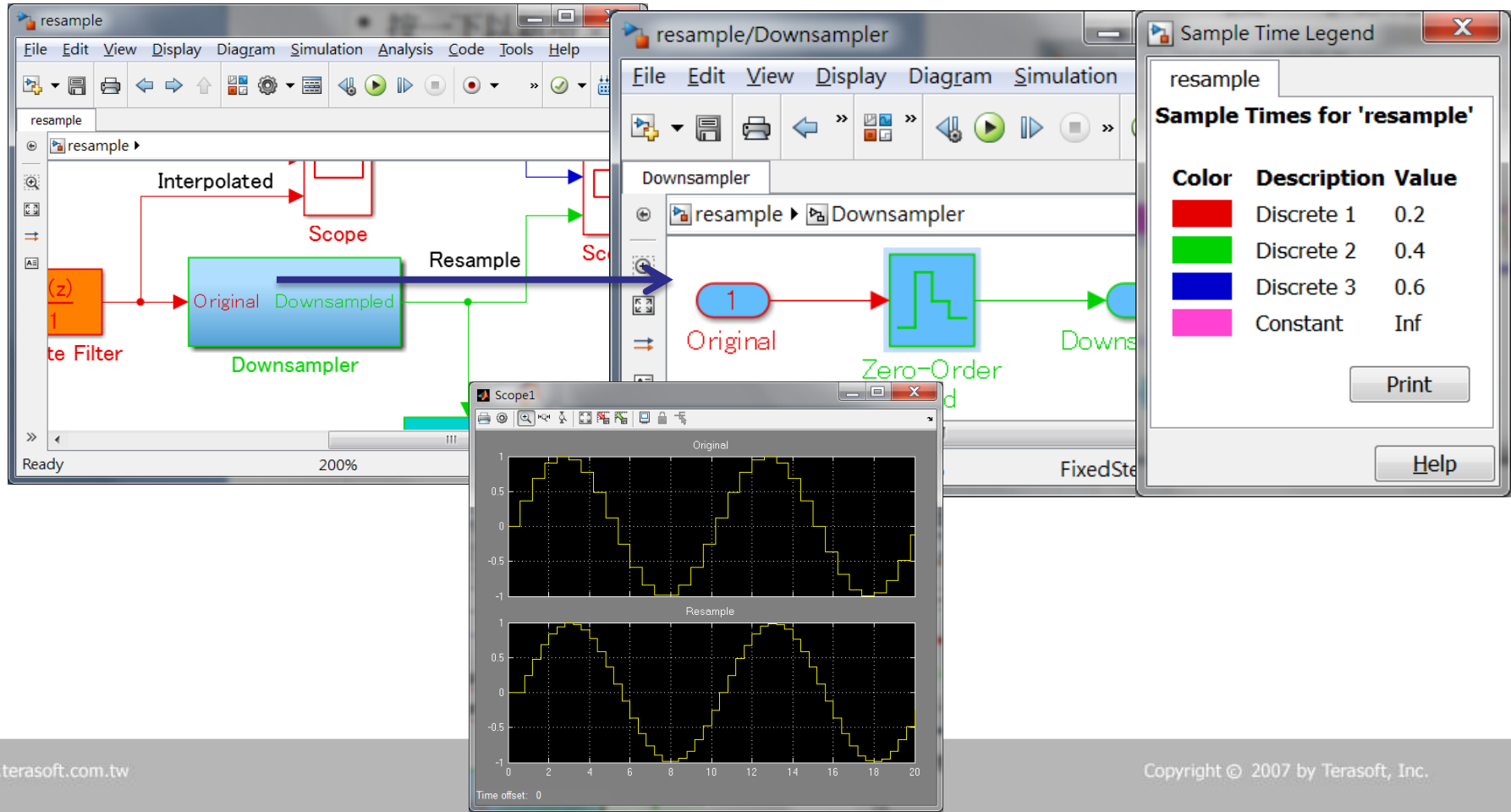
觀察經過filter 後的訊號





Example：Multi-rate model (down sampling)

- 取樣時間由0.2秒取樣一次降到0.4秒取樣一次 。原始訊號取樣速率0.6秒。Overall 來講最後取樣速率是原本的1.5倍。



Hybrid system的建模

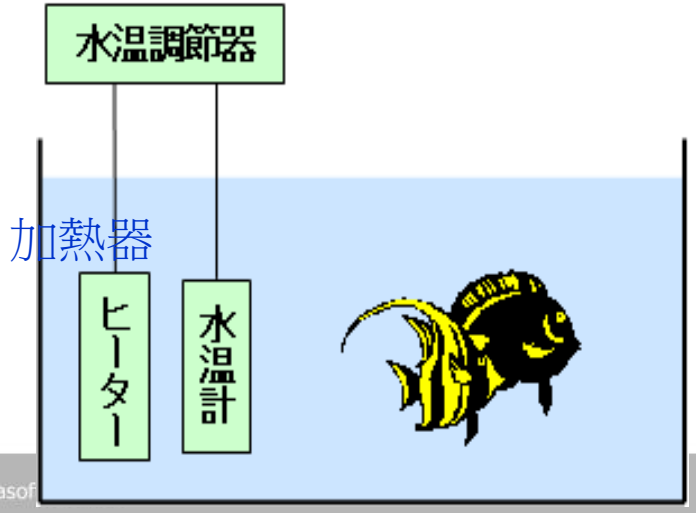
- 連續系統和離散系統混合

  Example:恆溫器的水槽的自動溫度調節

  把水溫作為T [℃]的話，那個時間變化用下面的方程式表示。

$$C\frac{dT}{dt} = Q_H + Q_R$$

一階；須一個積分器



水溫控制系統

- C水槽系全部的熱容[kcal/℃]，Q_H、Q_R 各表示來自加熱器及外部的單位時間的發熱量[kcal/sec]。 其中

$$Q_R = \frac{T_R - T}{R}$$

- R表示單位時間的熱阻的比例係數[sec·℃/kcal]，T_R 室溫。關於室溫，考慮日常的溫度變化 $T_R(0)$ ±4℃的正弦波表示。

$$T_R(t) = T_R(0) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{24\times 3600}t\right)$$

頻率設一天

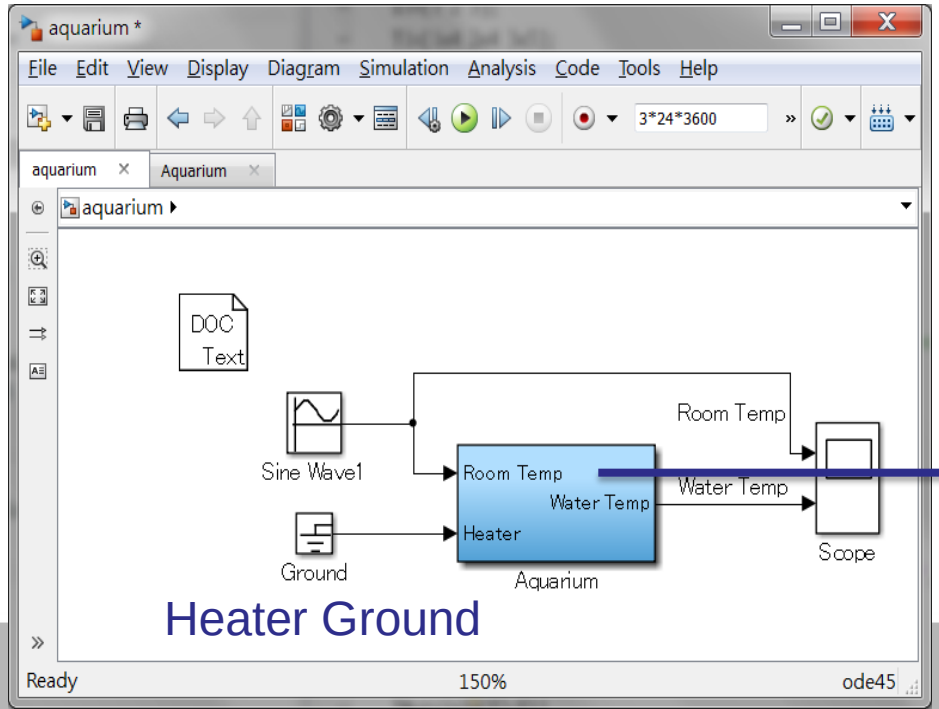
沒有加熱器的model

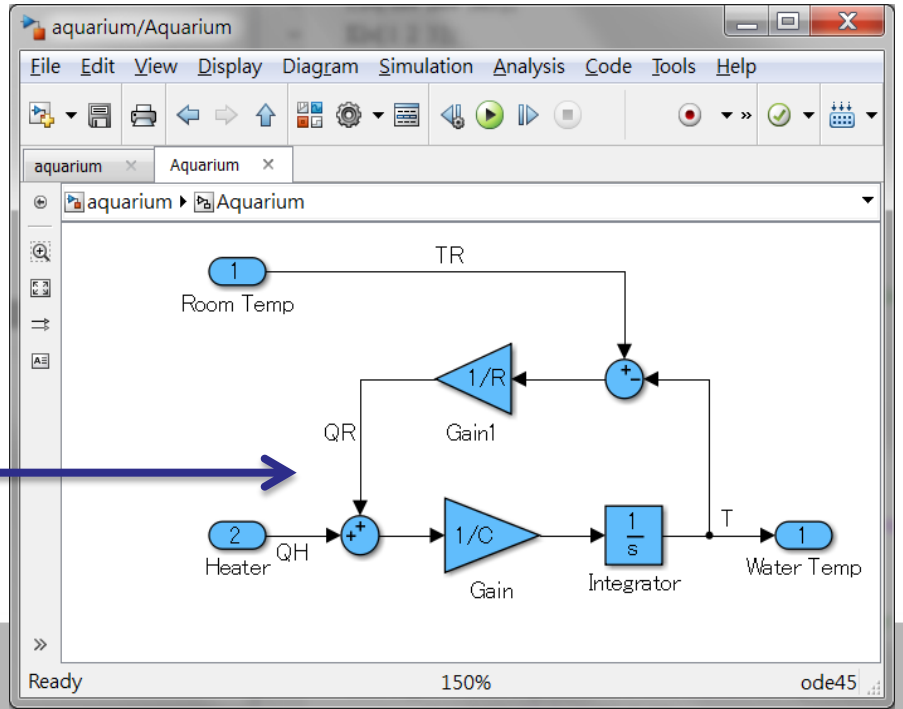
- 由三個等式導出底下的model

$$C\frac{dT}{dt} = Q_H + Q_R$$

$$Q_R = \frac{T_R - T}{R}$$

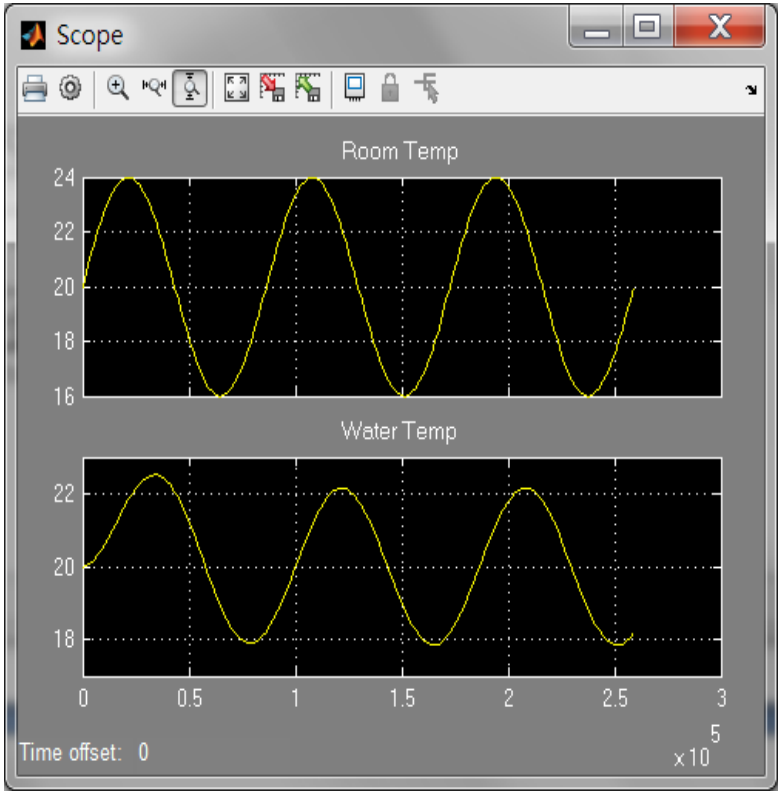
$$T_R(t) = T_R(0) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{24\times 3600}t\right)$$





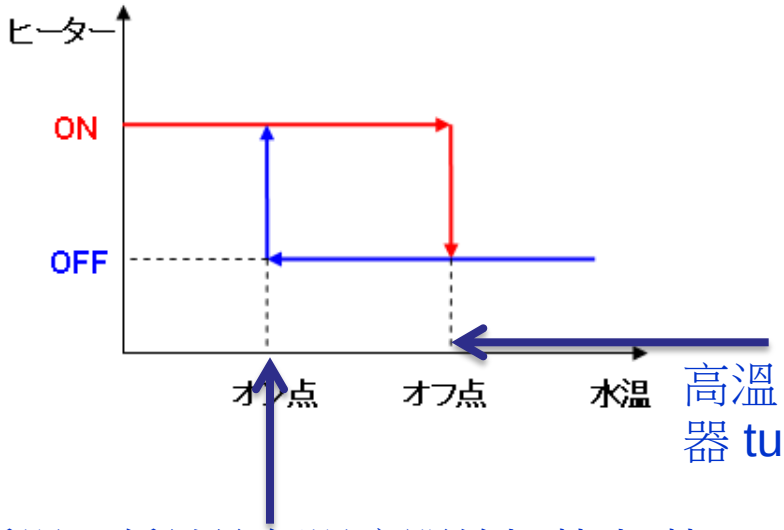
沒有加熱器模擬結果

- Initial 溫度 設20度，室溫在20正負4度變化 觀察三天結果如下。



有加熱器的model(band-band)

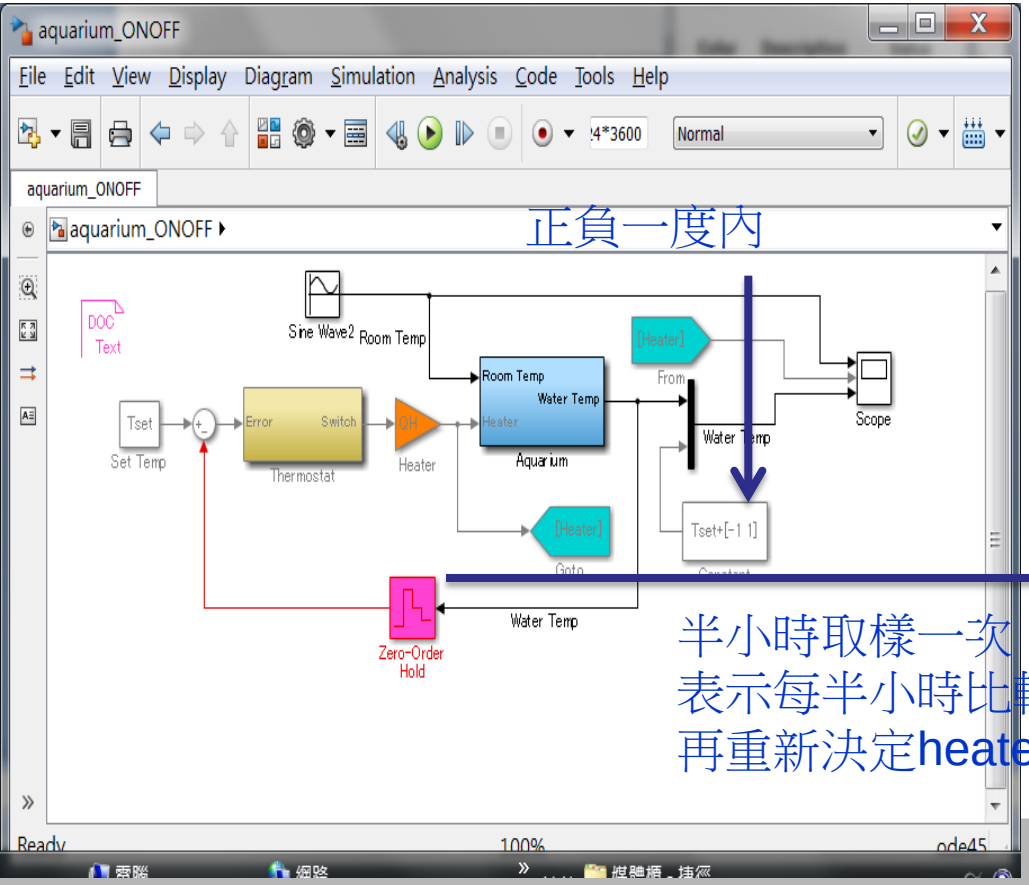
- 水溫變得低的話打開加熱器的開關，反過來變得高的話切斷控制開關。



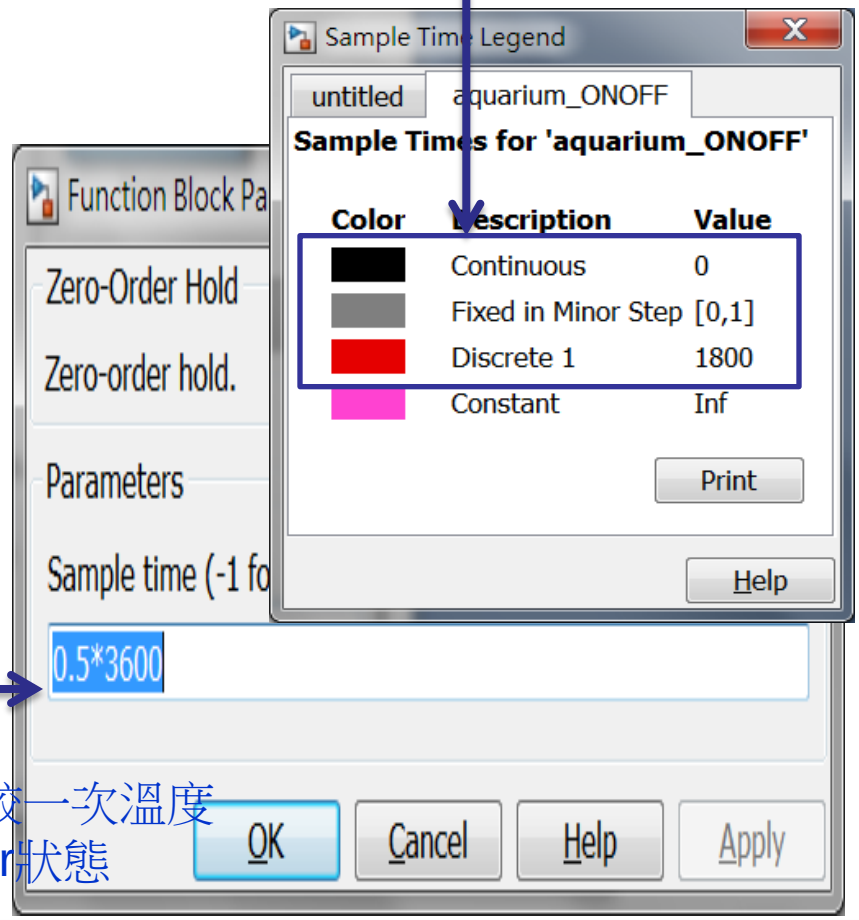
有加熱器的model（續）

- 同樣模擬三天

Hybrid system:
連續+離散



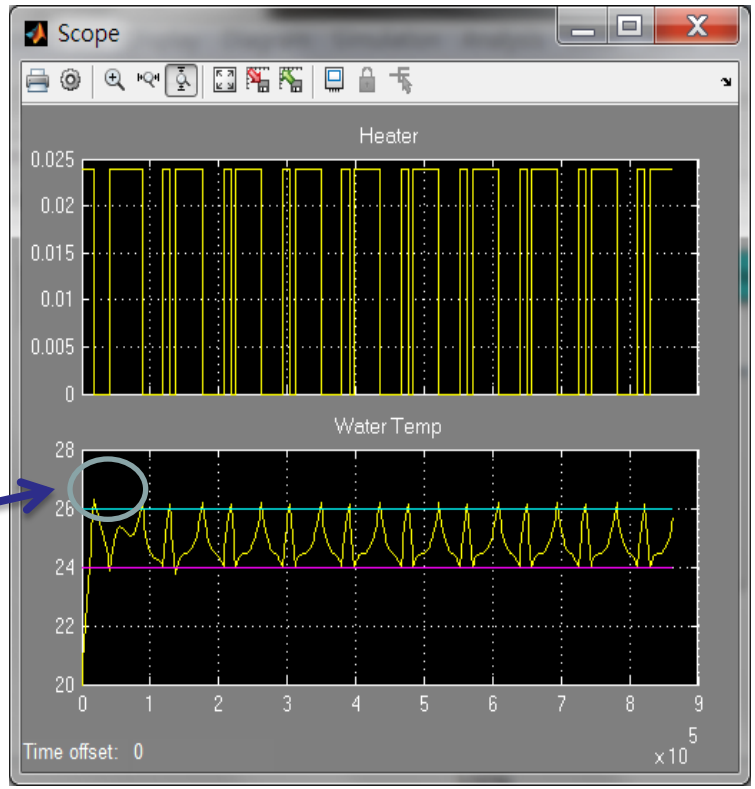
半小時取樣一次
表示每半小時比較一次溫度
再重新決定heater狀態



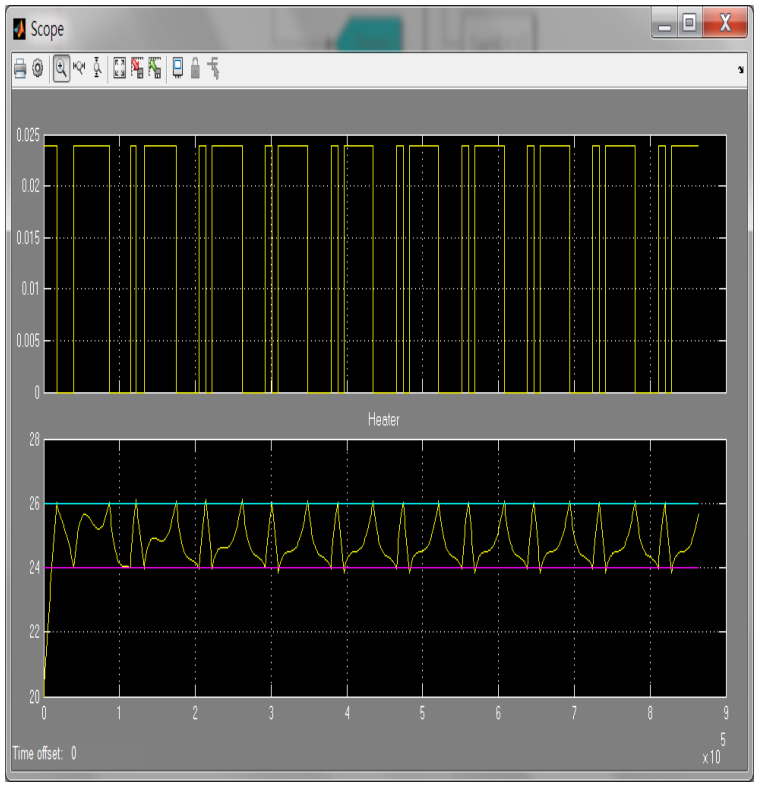
有加熱器模擬結果

High low表示 heater off

溫度超過 spec 可以調整 sampleing time 降低誤差



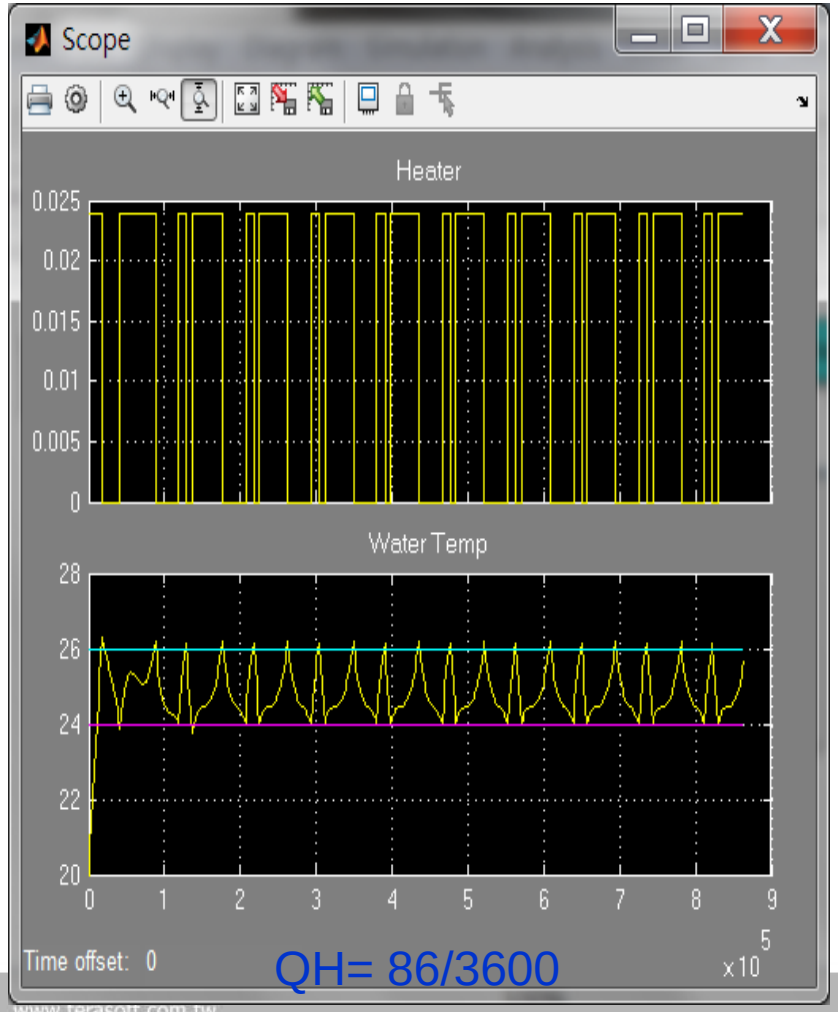
Sampling time =1800sec



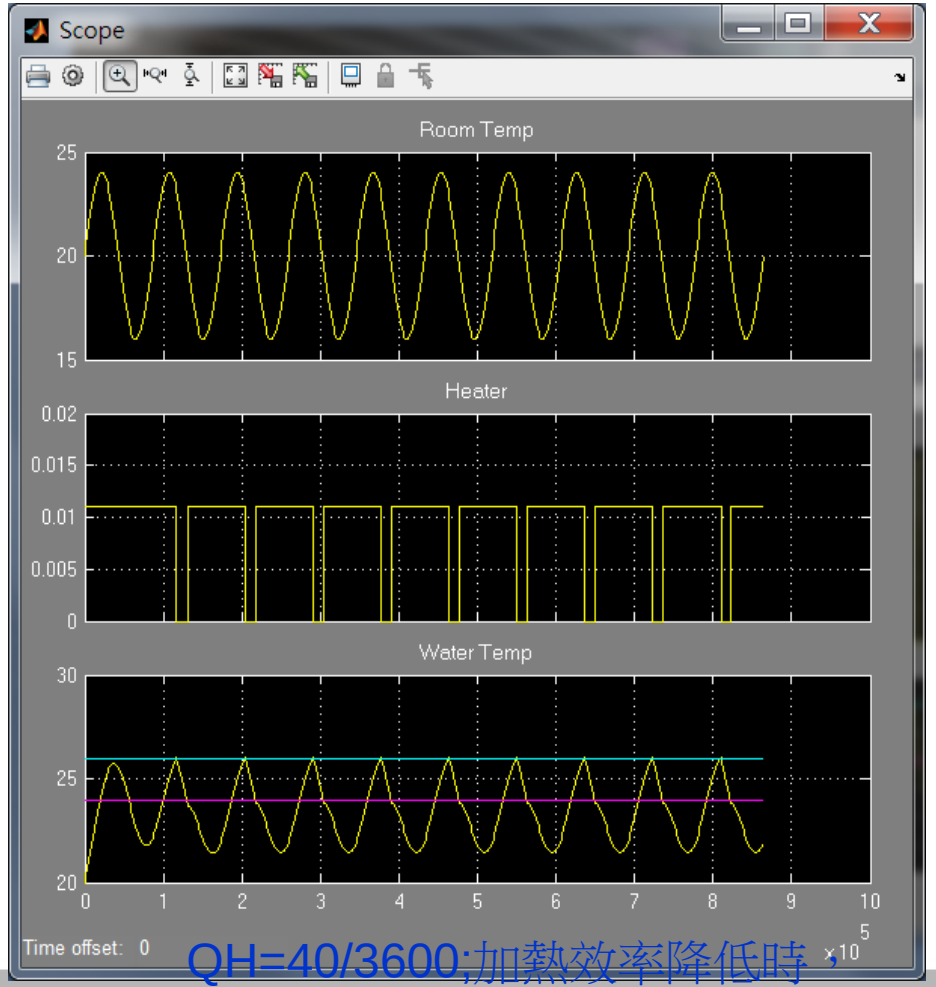
Sampling time =900sec

其它條件模擬結果

- Q_H 從原本 86/3600 降到 40/3600 。



QH= 86/3600



QH=40/3600;加熱效率降低時，室溫的影響大於加熱的效果。

Q & A

Thank you very much

Have a good time